國立中山大學應用數學系高中資優班
（2013年11月10日）

一球變兩球：
選擇公設的驚人後果

李國偉
中央研究院數學研究所

《科學人》2011年10月號
教育部高中數學學科中心電子報
http://mathcenter.ck.tp.edu.tw/Resources/Ctrl/ePaper/eArticleDetail.aspx?id=31a5064f-fe04-4928-8ad9-906f467d512

巴拿赫—塔斯基悖論

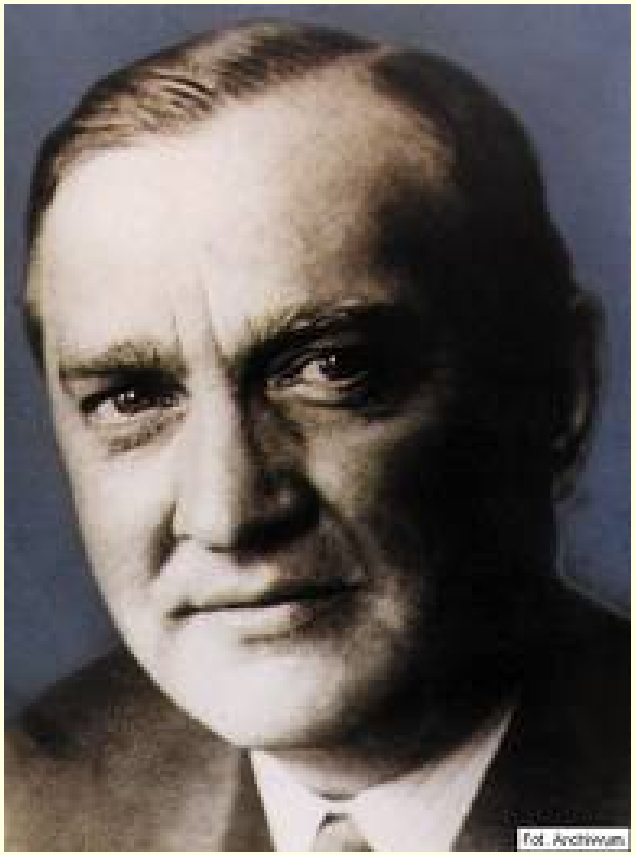
（Banach-Tarski Paradox）

（其實是巴拿赫—塔斯基定理）

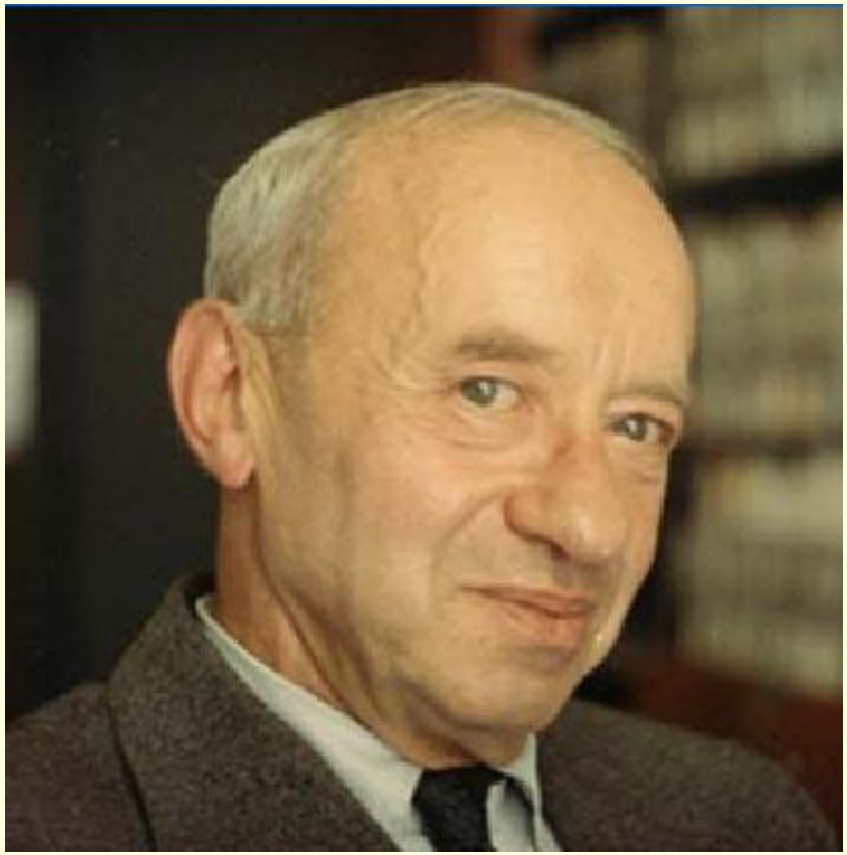
巴拿赫與塔斯基

Tarski, student photo
at the University of
Warsaw (circa 1918)

Stefan Banach
(1892–1945)



Alfred Tarski
(1902–1983)



Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes.

Par

St. Banach (Lwów) et A. Tarski (Varsovie).

Nous étudions dans cette Note les notions de *l'équivalence des ensembles de points par décomposition finie*, resp. *dénombrable*. Deux ensembles de points situés dans un espace métrique sont dits équivalents par décomposition finie (ou dénombrable), lorsqu'ils peuvent être décomposés en un nombre fini et égal (ou une infinité dénombrable) de parties disjointes respectivement congruentes.

Les principaux résultats contenus dans le présent article sont les suivants:

Dans un espace euclidien à $n \geqslant 3$ dimensions deux ensembles arbitraires, bornés et contenant des points intérieurs (p. ex. deux sphères à rayons différents), sont équivalents par décomposition finie.

Un théorème analogue subsiste pour les ensembles situés sur la surface d'une sphère; mais le théorème correspondant concernant l'espace euclidien à 1 ou 2 dimensions est faux.

D'autre part:

Dans un espace euclidien à $n \geqslant 1$ dimensions deux ensembles arbitraires (bornés ou non), contenant des points intérieures, sont équivalents par décomposition dénombrable.

La démonstration des théorèmes précédents s'appuie sur les résultats de MM. Hausdorff, Vitali et Banach[1]), qui concernent le probléme général de mesure; elle fait donc usage de *l'axiome*

[1]) F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig 1914, p. 401 et 469.
G. Vitali, *Sul problema della mesura dei gruppi di punti di una retta*, Bologna 1905.
St. Banach, *Sur le problème de mesure*, Fund. Math. IV, 1923, p. 30—31.

Fundamenta Mathematicae, 1924

斯坦豪斯
(Hugo Steinhaus, 1887–1972)

斯坦豪斯「發現」了巴拿赫

1916年斯坦豪斯在波蘭克拉科夫（Kraków）的公園裡，聽到兩位年輕人在討論數學，其中一位甚至談到高深的「勒貝格積分」（Lebesgue integral）。日後，斯坦豪斯很得意地宣稱他在數學裡最重要的發現，就是「發現」了巴拿赫。

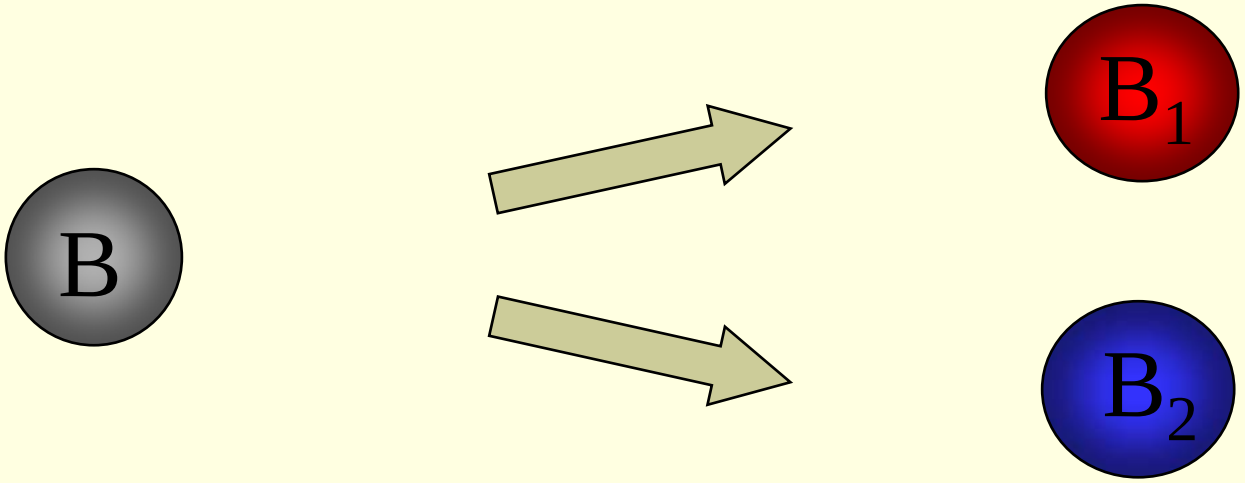
斯坦豪斯與這兩位年輕人—巴拿赫與尼可定（Otto Nikodým）—創建了克拉柯夫數學會，該學會後來擴大成波蘭數學會。

巴拿赫—塔斯基定理

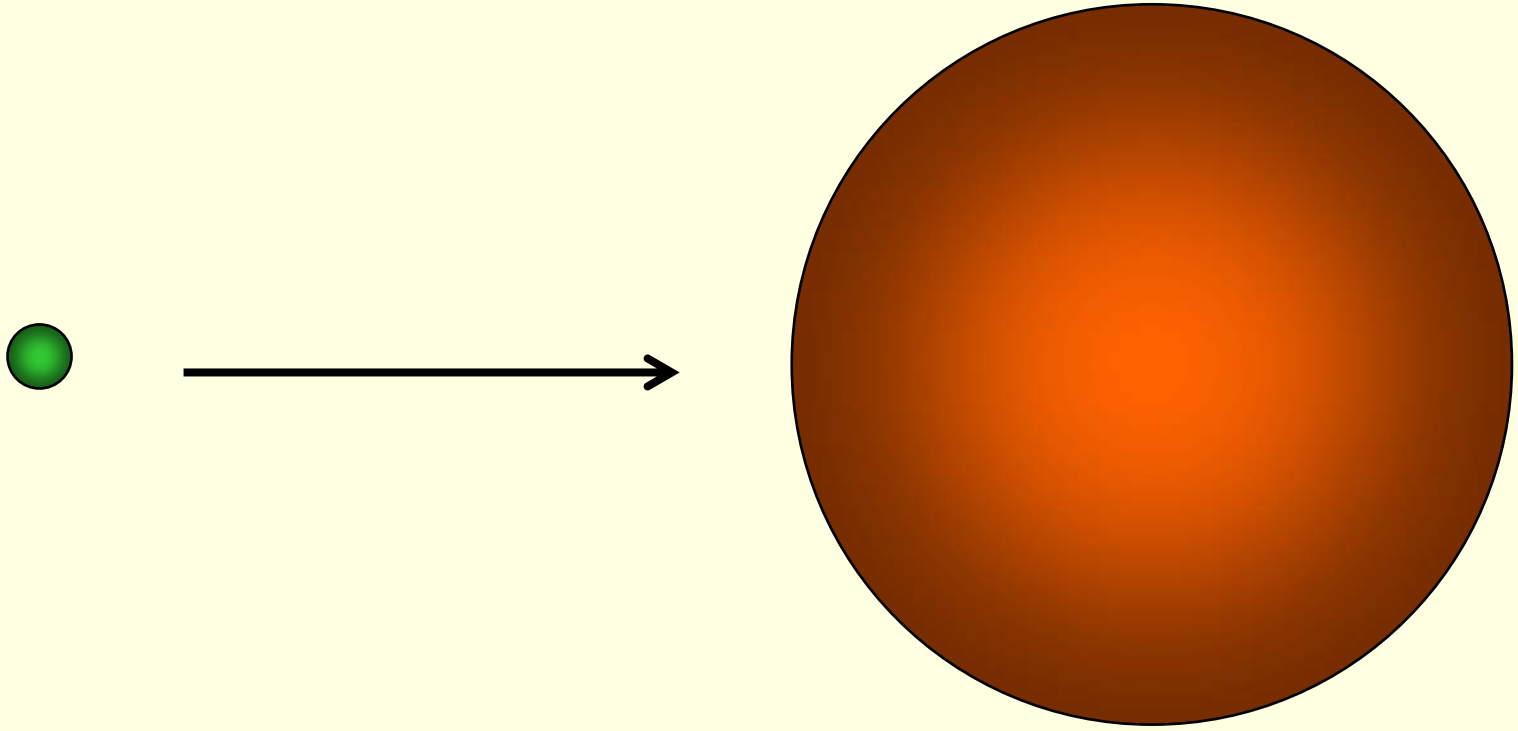
是什麼東東？

不太嚴謹地說 ...

可以把一個實心的球分成有限塊，然後把它們重組成兩個球，而且每一個新球都跟原來的球有同樣的形狀與體積。



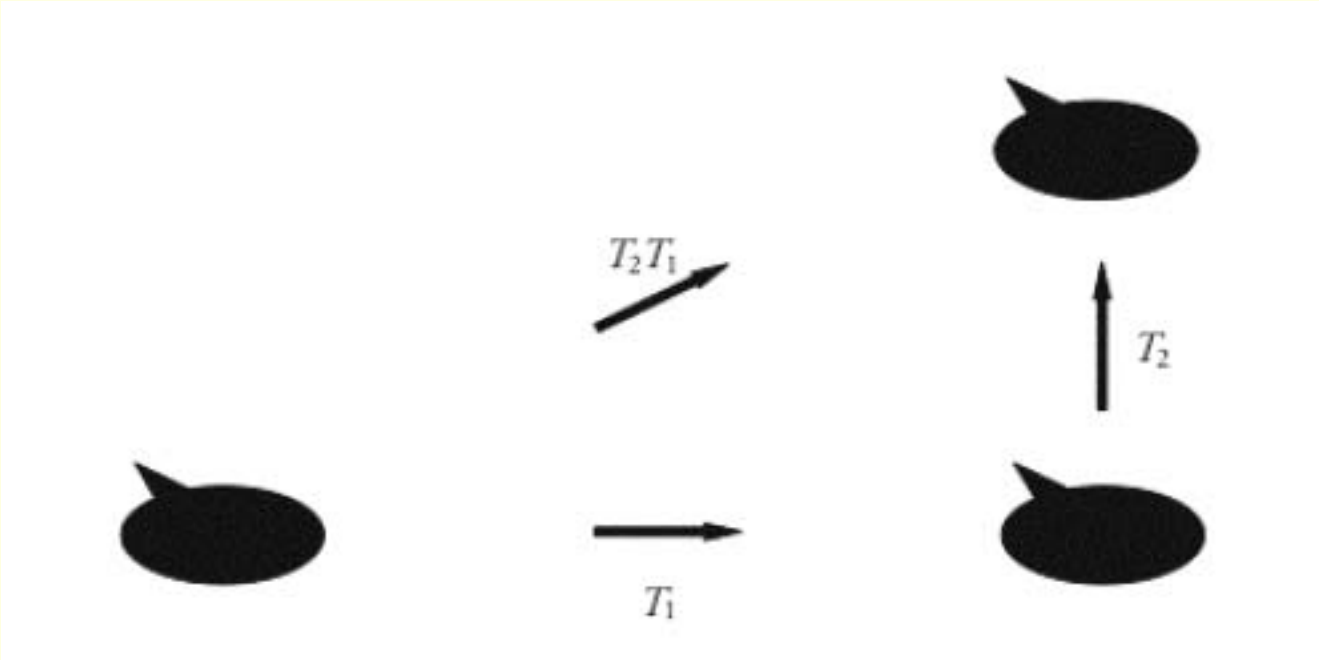
（誇張的比喻）綠豆變太陽



想要理解得更清楚一點，

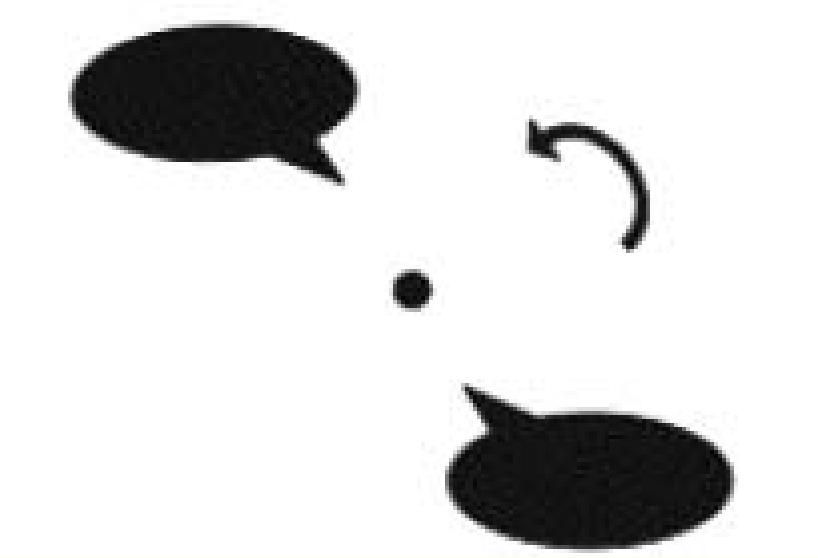
就需要些先備知識。

剛體運動（1）



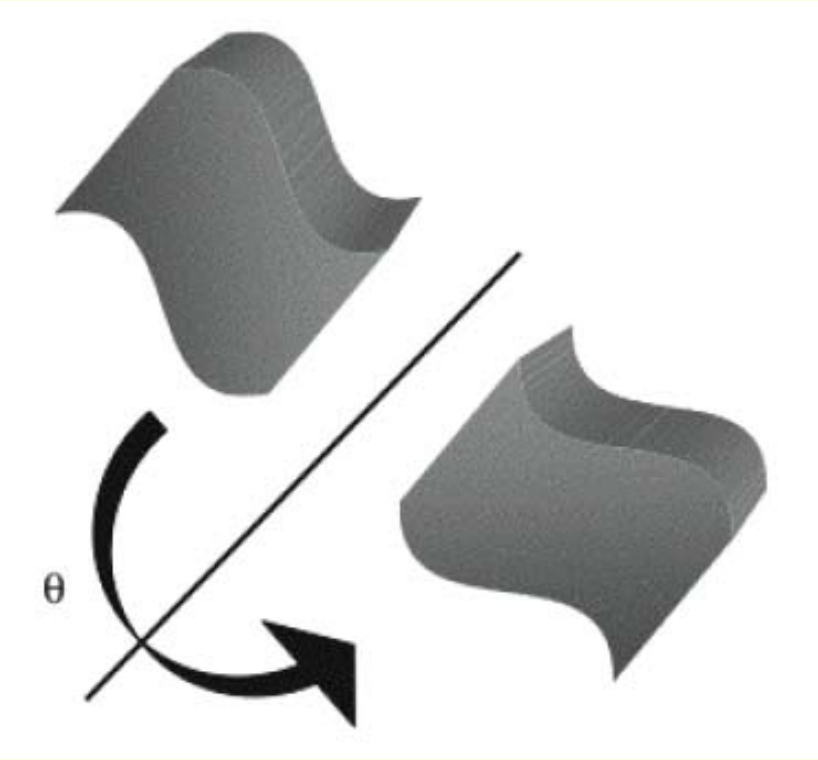
平移

剛體運動（2）



平面上的旋轉

剛體運動（3）



空間裡的旋轉

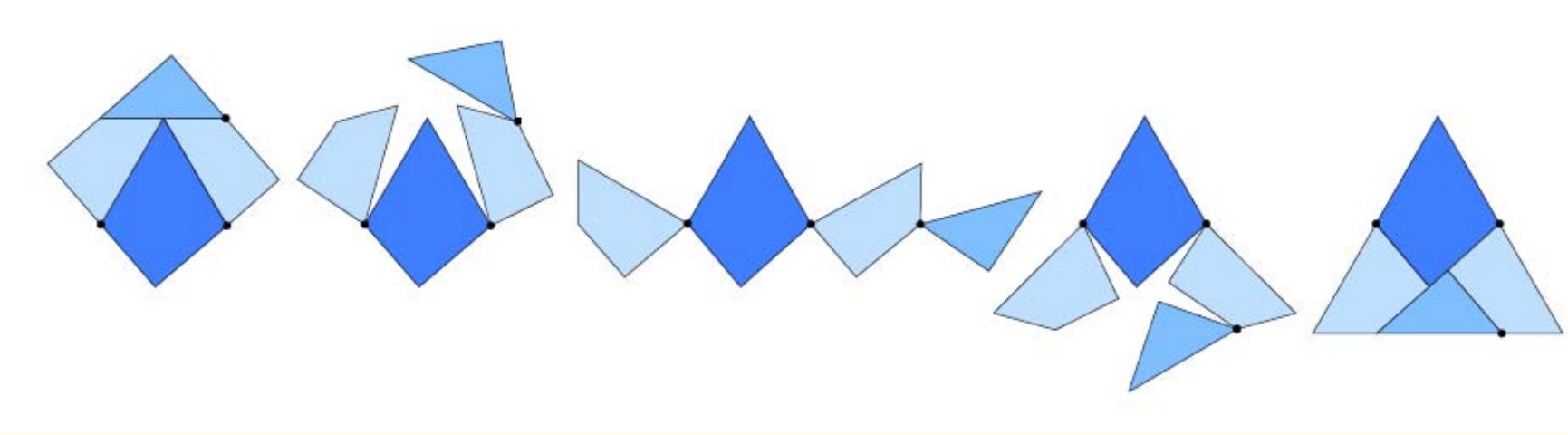
剛體運動

剛體運動 ＝ 平移 ＋旋轉

多邊形的拼圖式全等

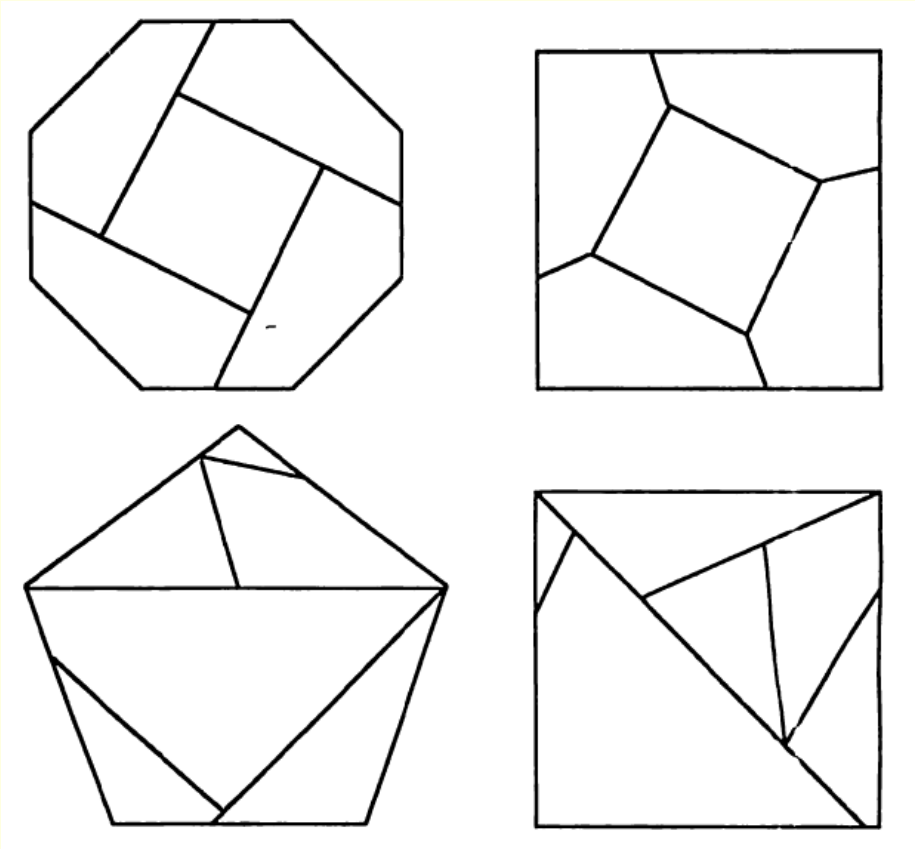
把平面上的多邊形（不限定是凸多邊形）A，用直線段切割（dissect）成有限塊多邊形，然後用剛體運動把那些小塊移動重組成多邊形 B，則稱 A 與 B 是拼圖式全等。

多邊形的拼圖式全等

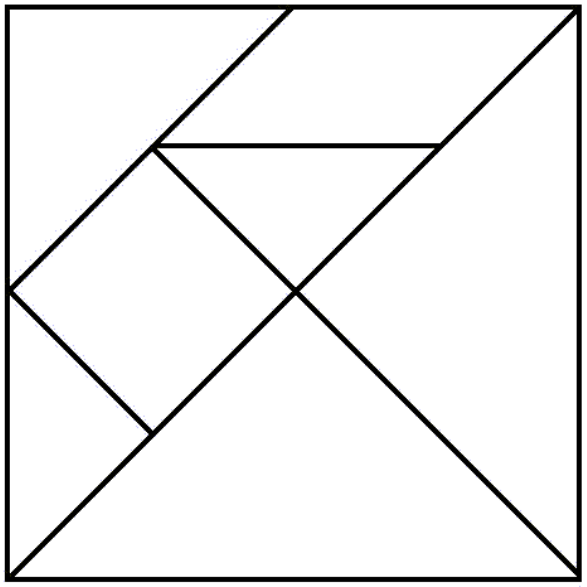


Dudeney 1902

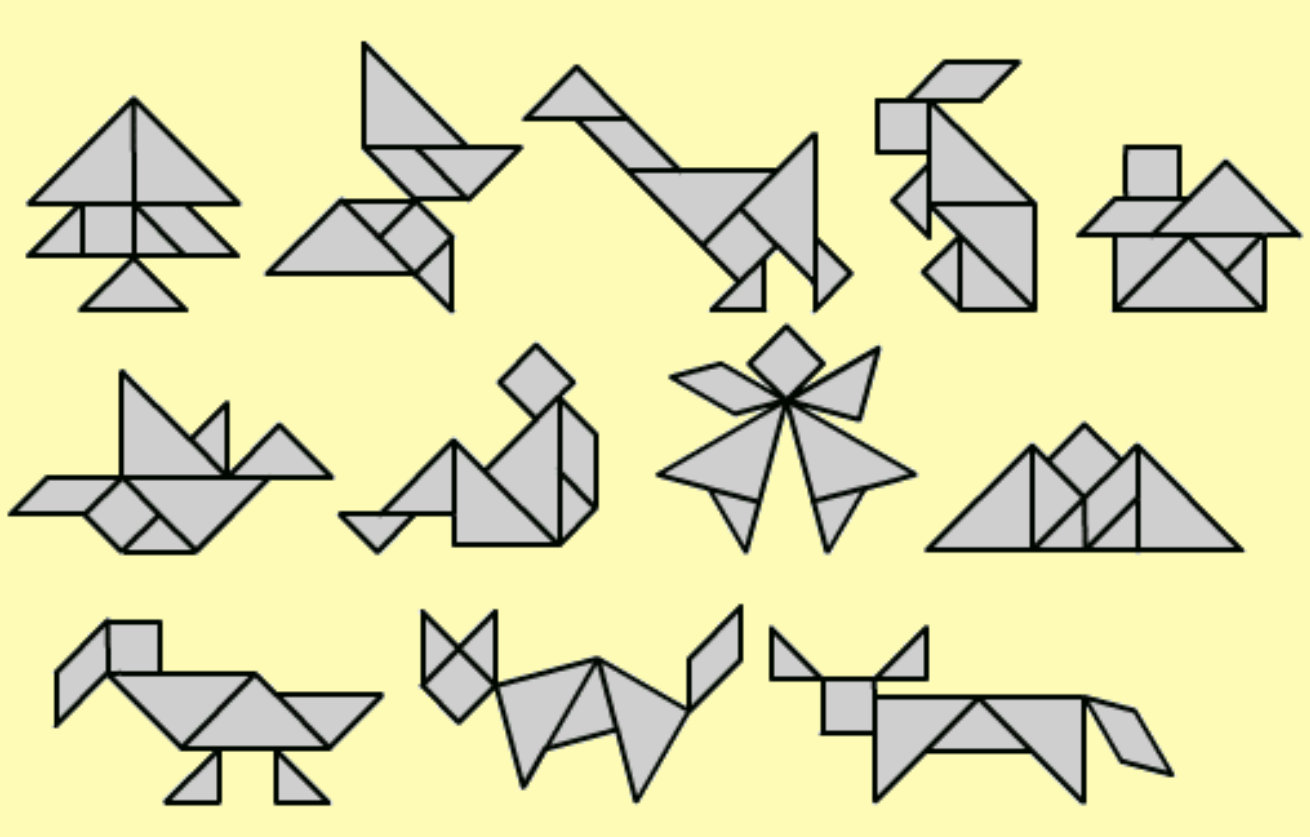
多邊形的拼圖式全等



七巧板



七巧板



直線切割

Dissections under Dynamic Geometry

by
Tse-hsuan Yang（楊澤璿）
Advisor Prof. Jen-chung Chuan（全任重）
Department of Mathematics
National Tsing Hua University
Hsin-Chu, Taiwan 300, R. O. C
May 2003

http://apollonius.math.nthu.edu.tw/d1/ne01/tjy/dissections/index.htm

Wallace-Bolyai-Gerwien定理

任何兩個多邊形是拼圖式全等的充要條件是它們具有相同的面積。

換言之，任何多邊形都拼圖式全等於一個跟自己面積相等的正方形。

Farkas Bolyai (1775 –1856)

William Wallace (1768–1843)

Wallace-Bolyai-Gerwien定理

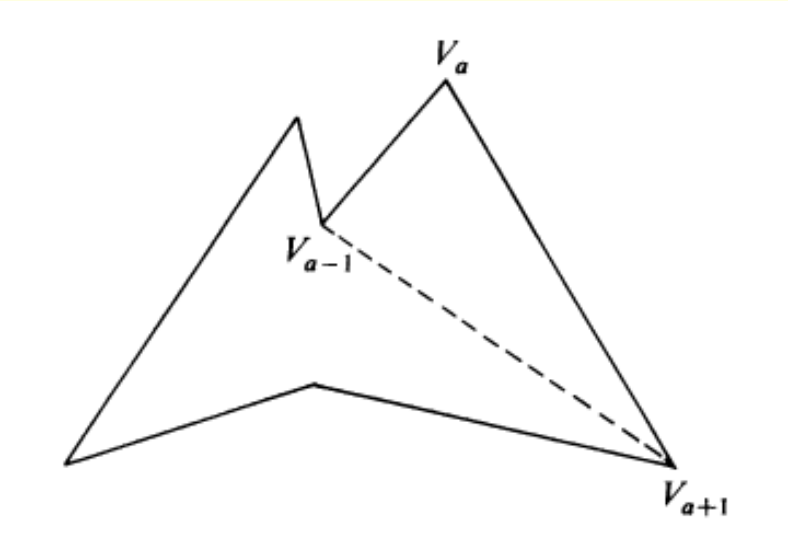
（⇒）顯然易見。

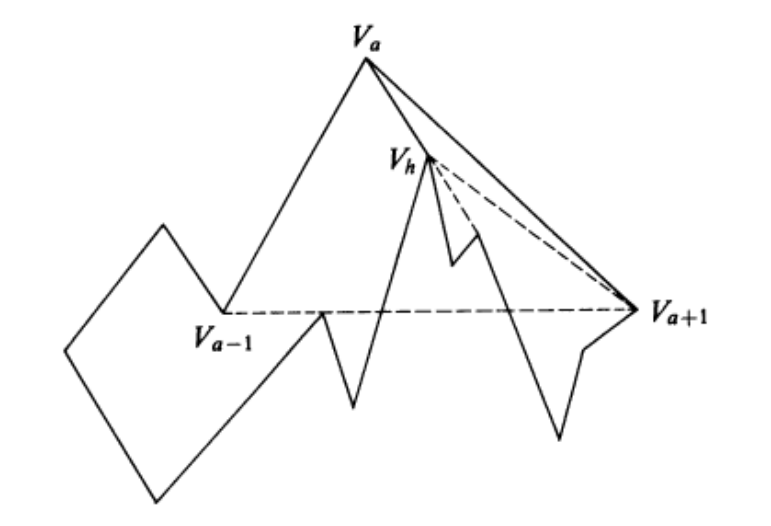
（⇐）證明「任何多邊形都拼圖式全等於一個跟自己面積相等的正方形」。

證明分成四個階段。

Wallace-Bolyai-Gerwien定理

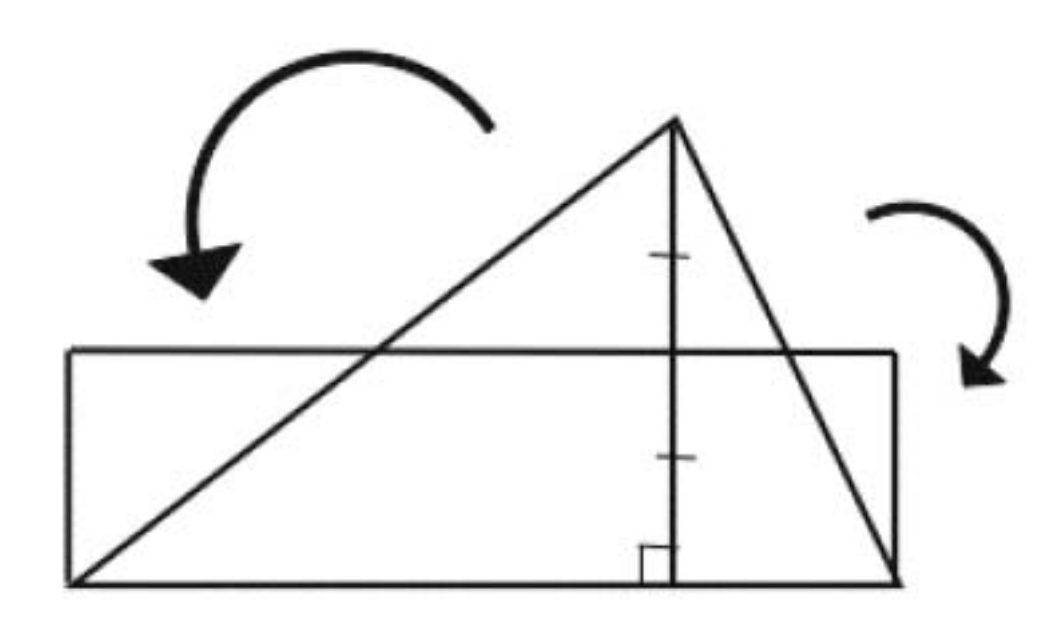
（1）任何多邊形可以切割成有限個三角形。





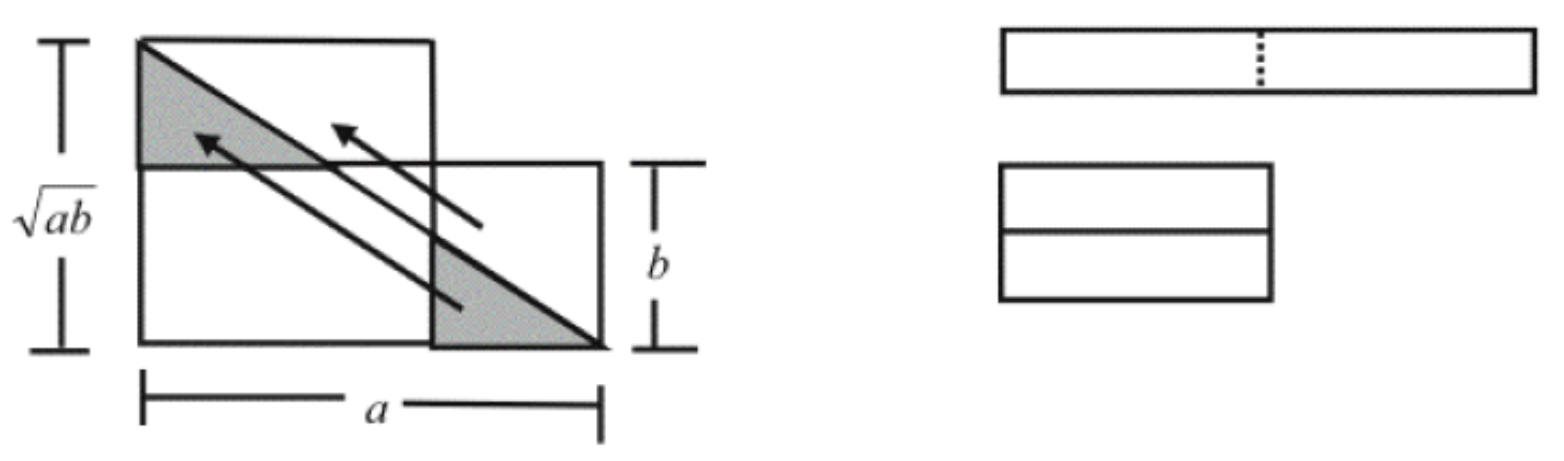
Wallace-Bolyai-Gerwien定理

（2）三角形拼圖式全等於矩形。



Wallace-Bolyai-Gerwien定理

（3）矩形拼圖式全等於正方形。

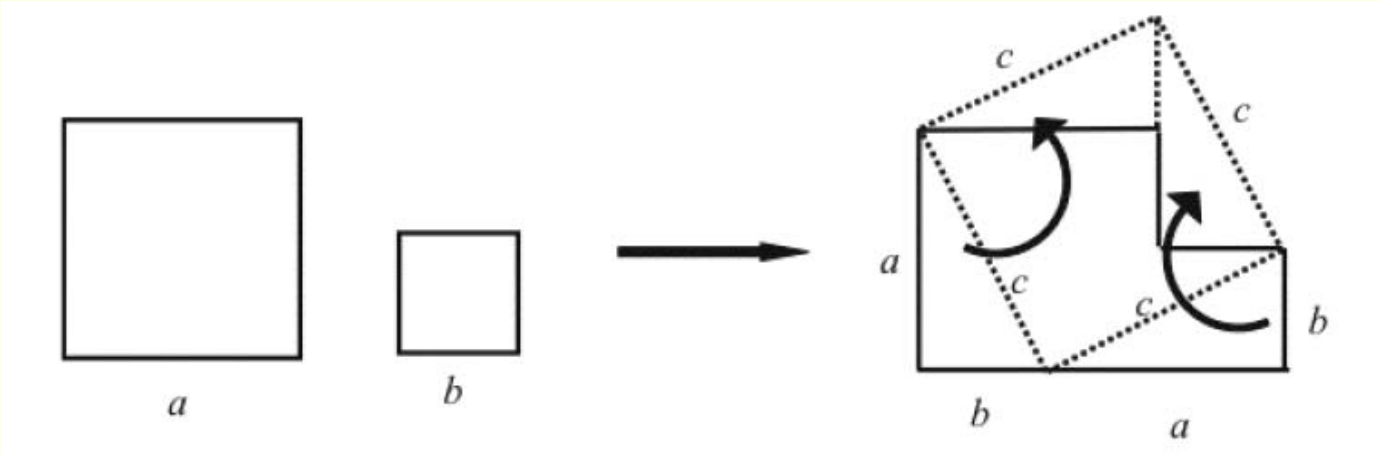


$a \leq 4b$

$a > 4b$ 時先對摺切開再堆疊。

Wallace-Bolyai-Gerwien定理

（4）兩個正方形拼圖式全等於一個正方形。



這也是畢氏定理的「出入相補法」證明。

多面體

一個有限體積的立體，它的邊界面是由有限個多邊形所構成，而滿足下列條件：

1、任何兩個面若交集不空，則它們共用一條邊線或一個頂點。

2、每條邊線恰為兩個面所共用。

3、共用一條邊線的兩面不落在同一平面上。

多面體的切割（dissection）

多面體 P 的切割是把 P 表示成

$$P = P_1 \cup P_2 \cup \cdots \cup P_k$$

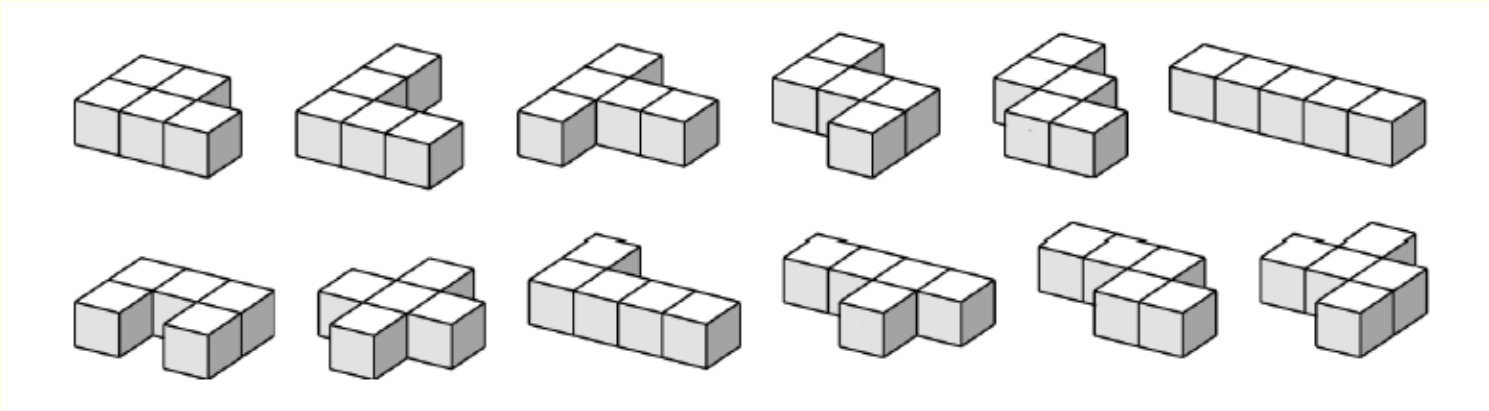
使得諸 P_i 均為多面體，而彼此之間

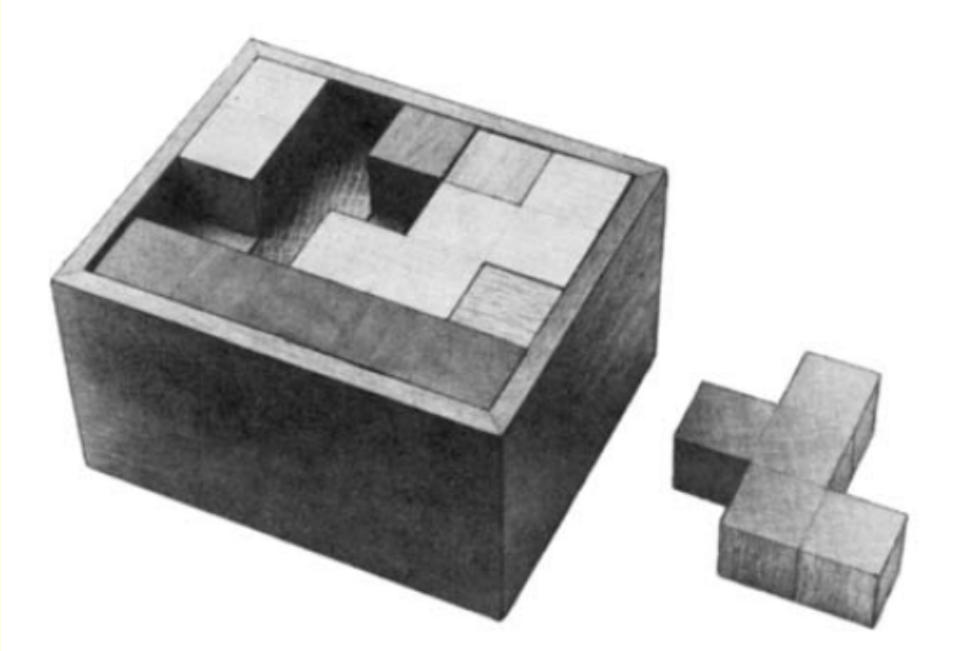
沒有共用任何內部的點。

多面體的拼圖式全等

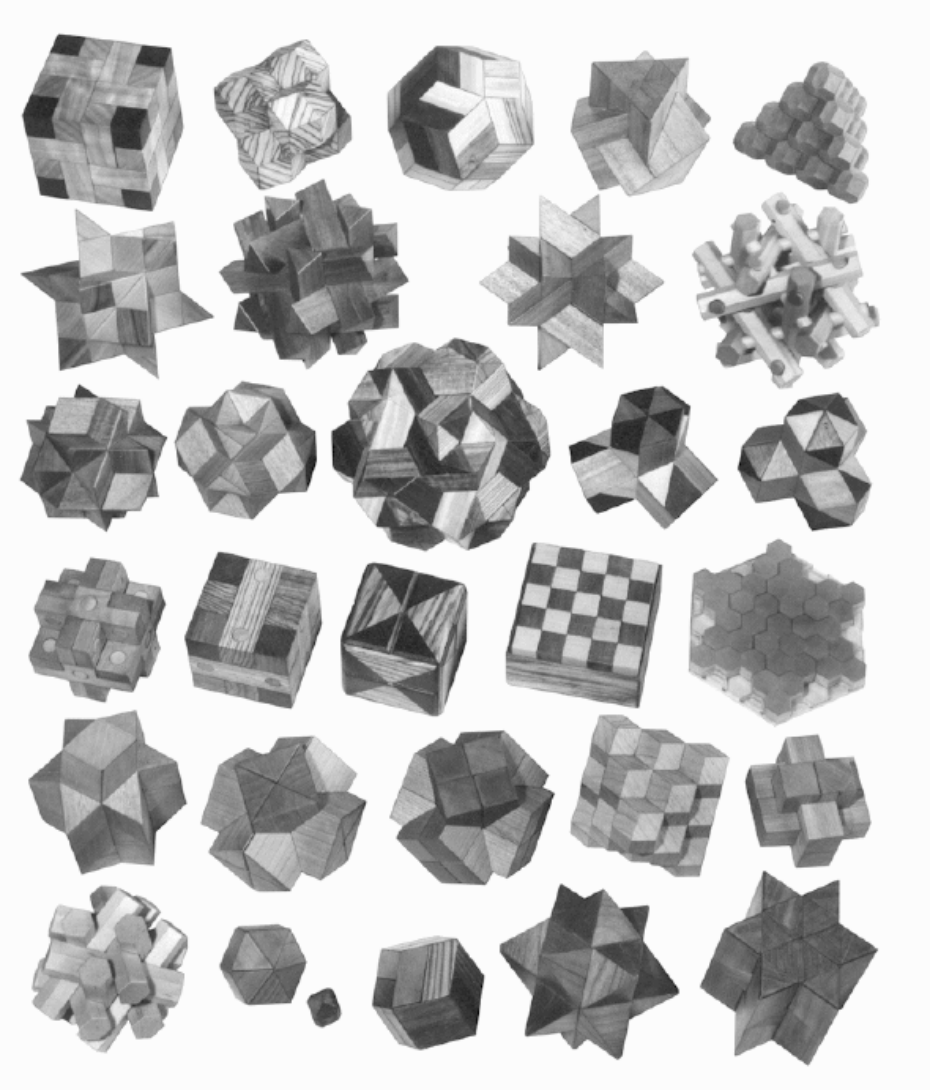
把空間裡的多面體（不限定是凸多面體）P，切割成有限塊多面體，然後用剛體運動把那些小塊移動重組成多面體 Q，則稱 P 與 Q 是拼圖式全等。

多面體的拼圖式全等





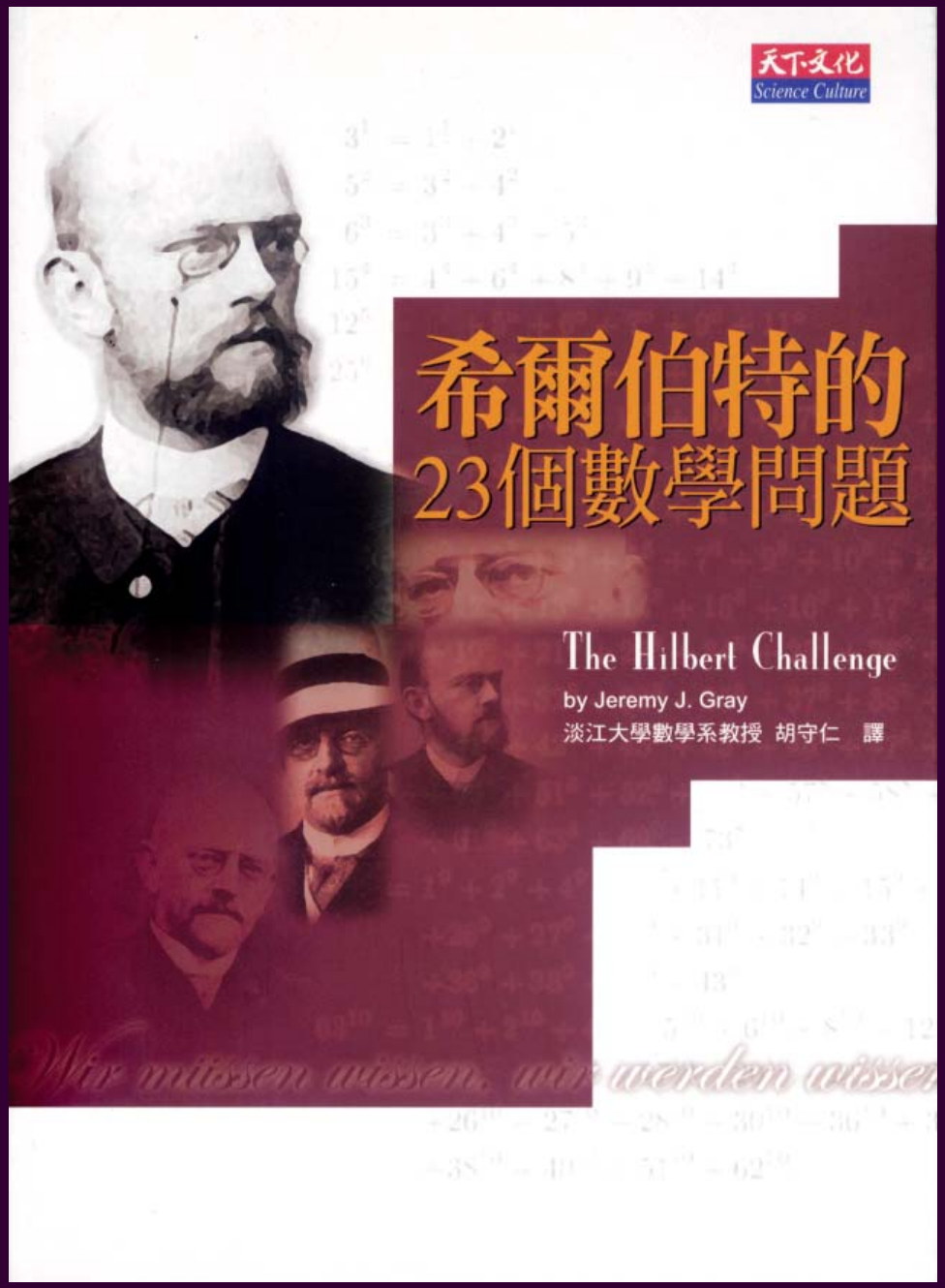
多面體的拼圖式全等



希爾伯特第三問題

希爾伯特在1900年巴黎的國際數學家大會上，宣布了23個重要的待解問題，其中第三問題在尋求下列問題的解答：

如果兩個多面體 P 與 Q 都具有相同的體積，那麼 P 與 Q 會不會是拼圖式全等？


天下文化
Science Culture
希爾伯特的
23個數學問題
The Hilbert Challenge
by Jeremy J. Gray
淡江大學數學系教授 胡守仁 譯
Wir müssen wissen, wir werden wissen

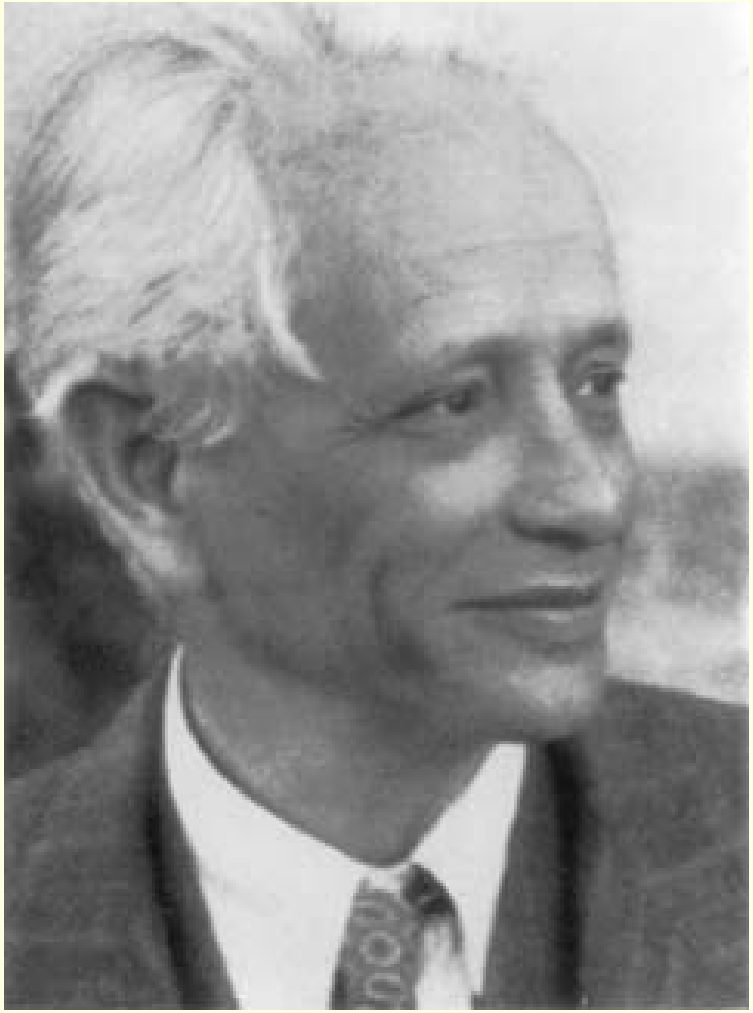
David Hilbert (1862–1943)

希爾伯特第三問題

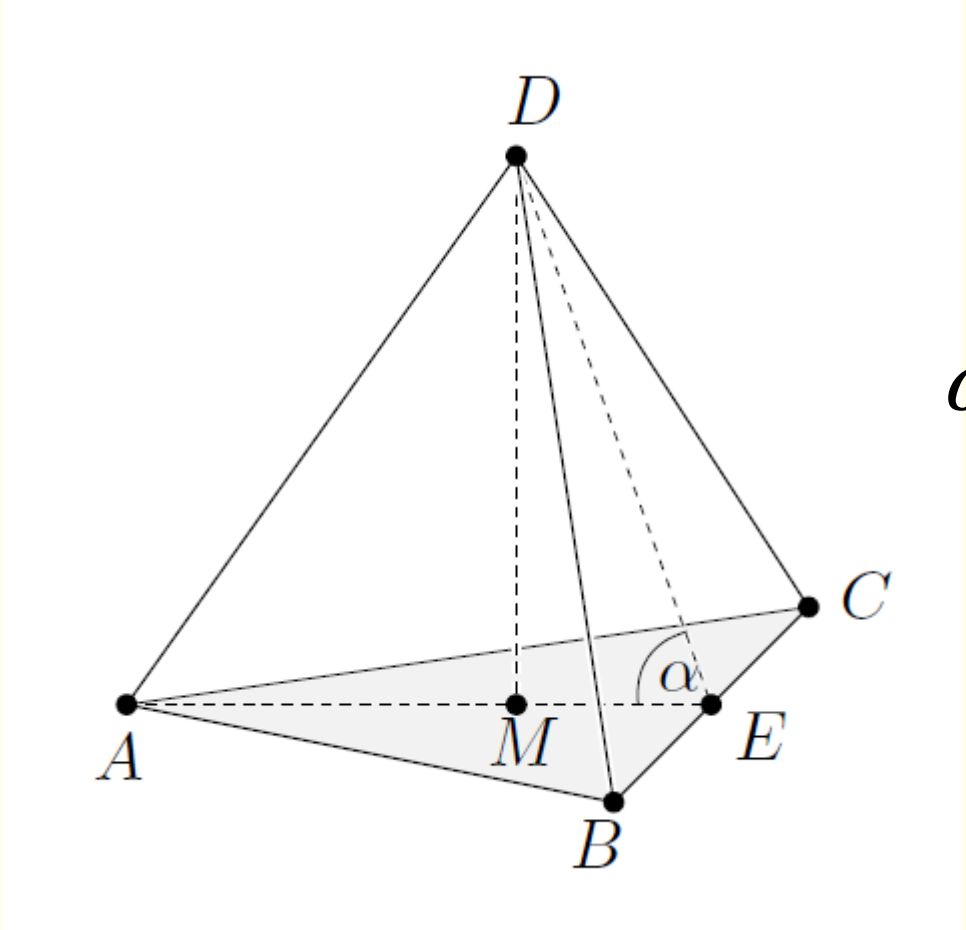
希爾伯特的學生Dehn在1900年就解決了第三問題，答案是否定的。

Dehn引進多面體上的一種不變量，當體積相等的兩個多面體會拼圖式全等時，它們就會具有相同的不變量。但是體積相同的正立方體與正四面體卻具有相異的不變量所以它們不會拼圖式全等。

Max Dehn (1878–1952)



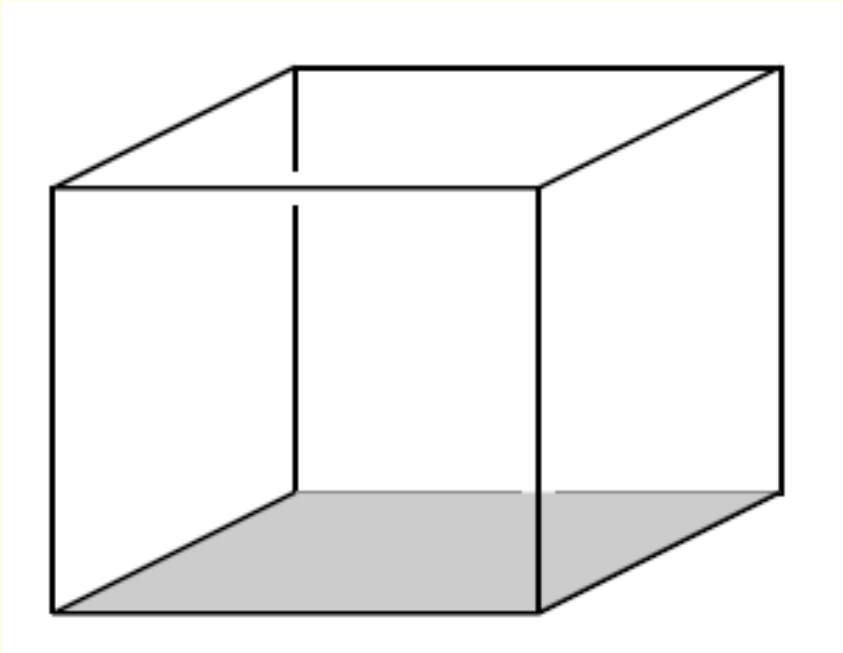
面與面之間的立體角



正四面體

$$\alpha = \arccos\frac{1}{3} \approx 70.53^\circ$$

面與面之間的立體角



正六面體

$$\alpha = \frac{\pi}{2}$$

Bricard 條件

令多面體 P 與 Q 的立體角分別是 α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_r$ 與 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$，如果 P 與 Q 是拼圖式全等，則存在整數 k 與諸正整數 m_i 與 n_j，使得

Bricard 條件

$$m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2 + \cdots + m_r\alpha_r$$

$$= n_1\beta_1 + n_2\beta_2 + \cdots + n_s\beta_s + k\pi$$

如果正六面體與正四面體要滿足此式，就有

$$m_1 \arccos\frac{1}{3} = n_1\frac{\pi}{2} + k\pi.$$

Bricard 條件

也就是說 $\frac{1}{\pi}\arccos\frac{1}{3}$ 是有理數。

但是對於任何大於或等於3的奇整數而言，下列形式的數均為無理數：

$$A(n) := \frac{1}{\pi}\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

所以希爾伯特第三問題的答案是否定的。

劃分（partition）

所謂集合 S 的劃分 $\{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$，就是從 S 裡拿出兩兩不相交的子集合 $S_1, S_2, \ldots, S_n$，使得

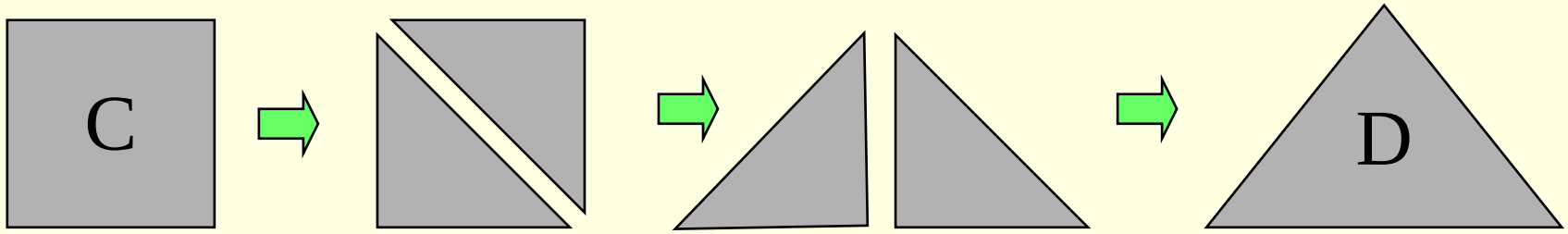
$$S = S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n$$

分段全等

對於空間裡給定的兩個集合 C 與 D ，假如能把 C 劃分成有限塊，然後再用剛體運動把這些塊重組成為 D，則我們稱 C 與 D 是分段全等，並且記作 C ~ D。

分段全等異於拼圖式全等

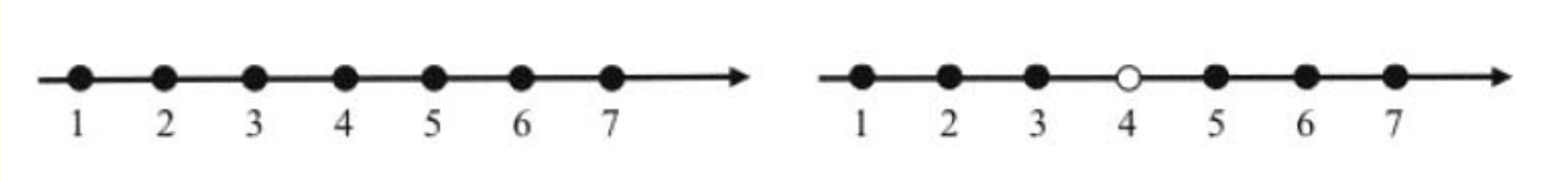
正方形 ➡ 等腰三角形



對角線只能屬於一個三角形！

這樣操作不能證明正方形分段全等於等腰三角形。

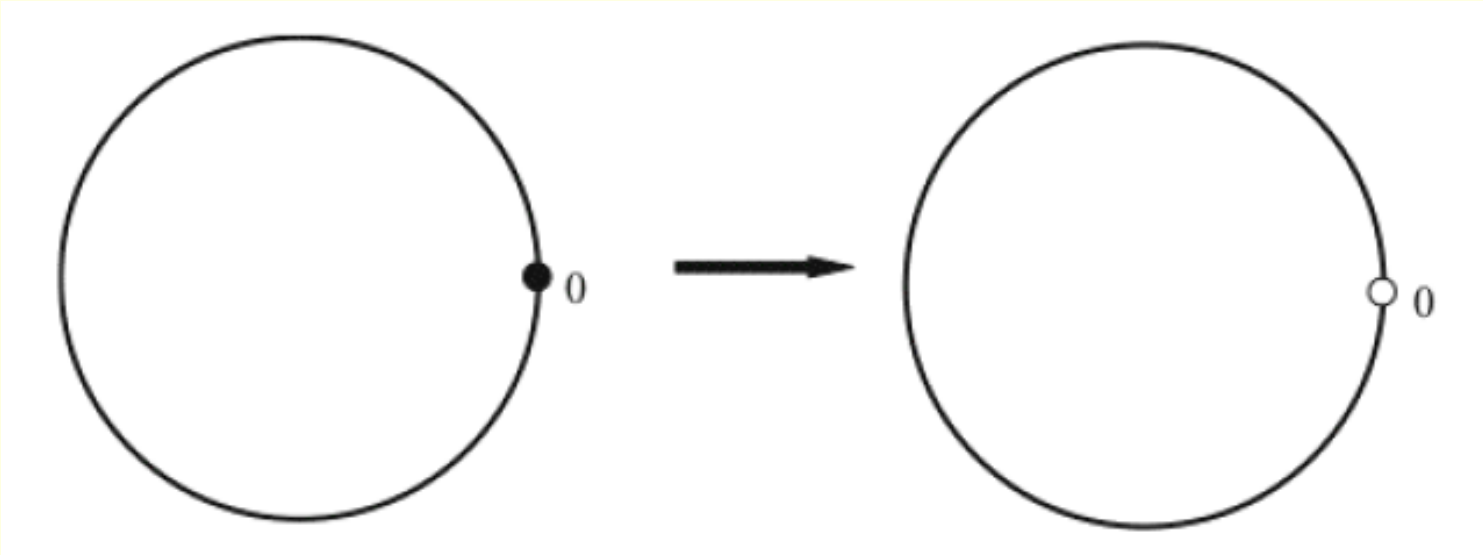
分段全等



A = { 1, 2, . . . }　　B = { 1, 2, 3, 5, . . . }

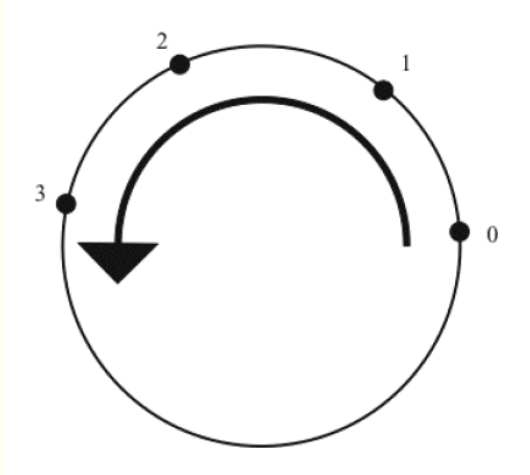
先把 B 劃分成 1, 2, 3 與 5, 6, 7, ... 這兩段，再把後面這段向左平移一個單位，即證明 A ~ B。

分段全等



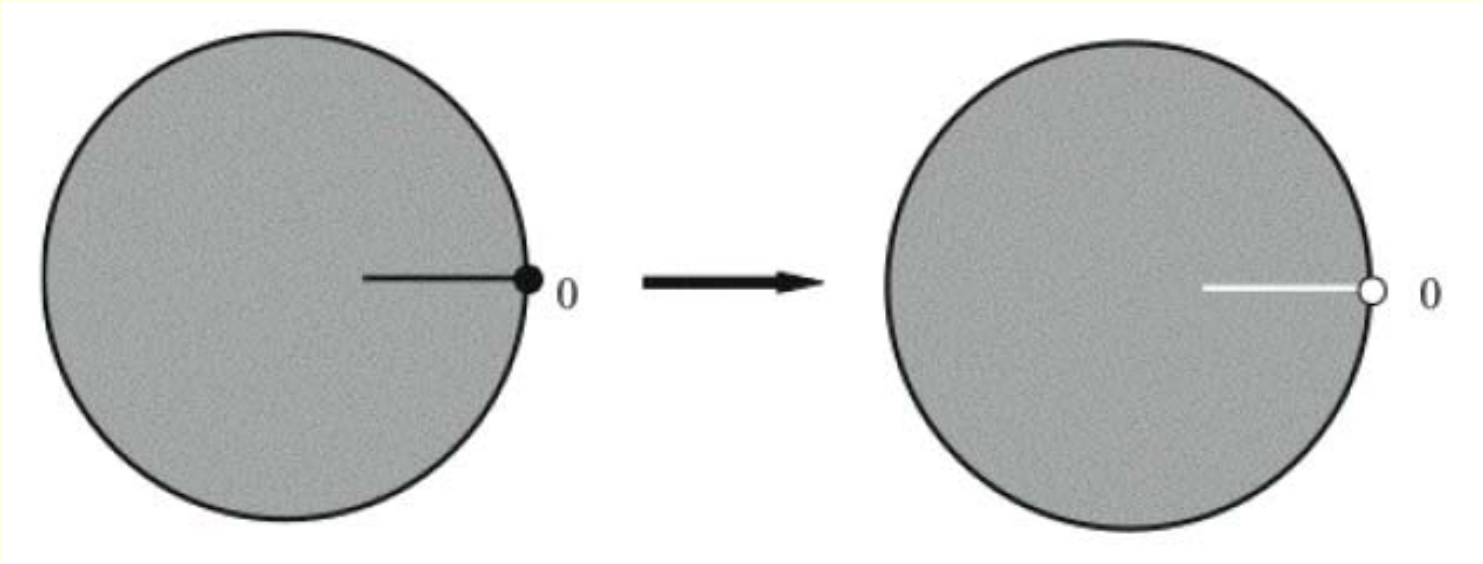
A 是單位圓周，B 是單位圓周去掉一個點。可證明 A ~ B。

分段全等



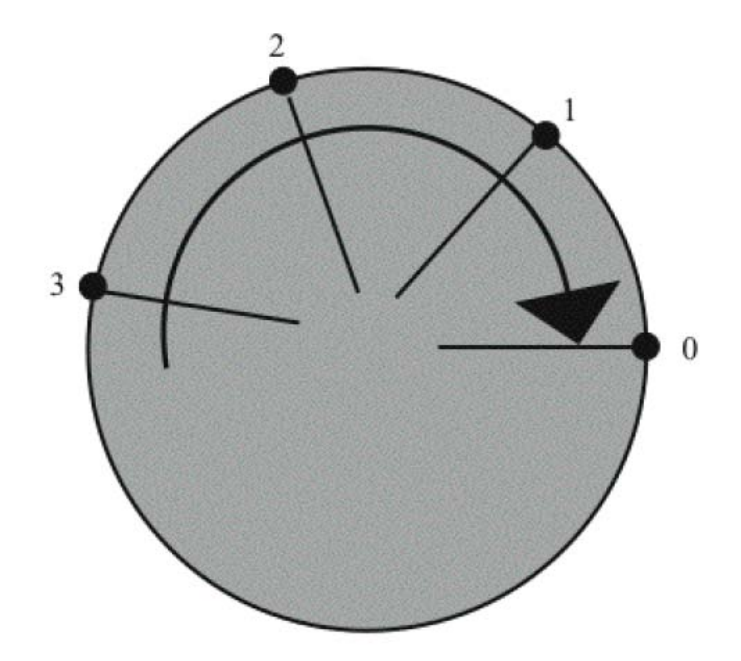
令 C 是圓周上所有正整數弧度點的集合，而 D = A – C。因為圓周長 2π 是無理數，所以 C 裡的點不會重複。把 C 集合逆時針轉一個弧度，再與 D 聯集，就得到 B。所以 A ~ B。

分段全等



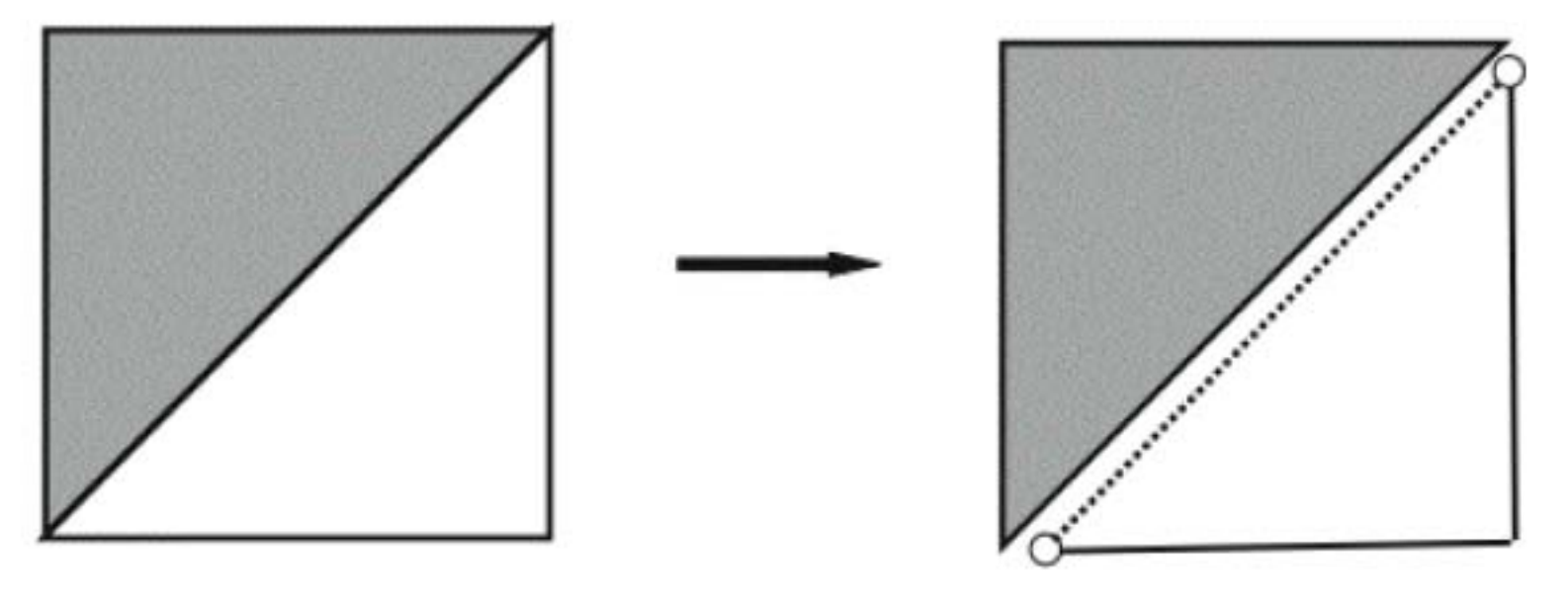
類似地可證明單位圓盤分段全等於單位圓盤去掉沿半徑方向的線段（長度小於半徑長，不含圓內的端點）。

分段全等



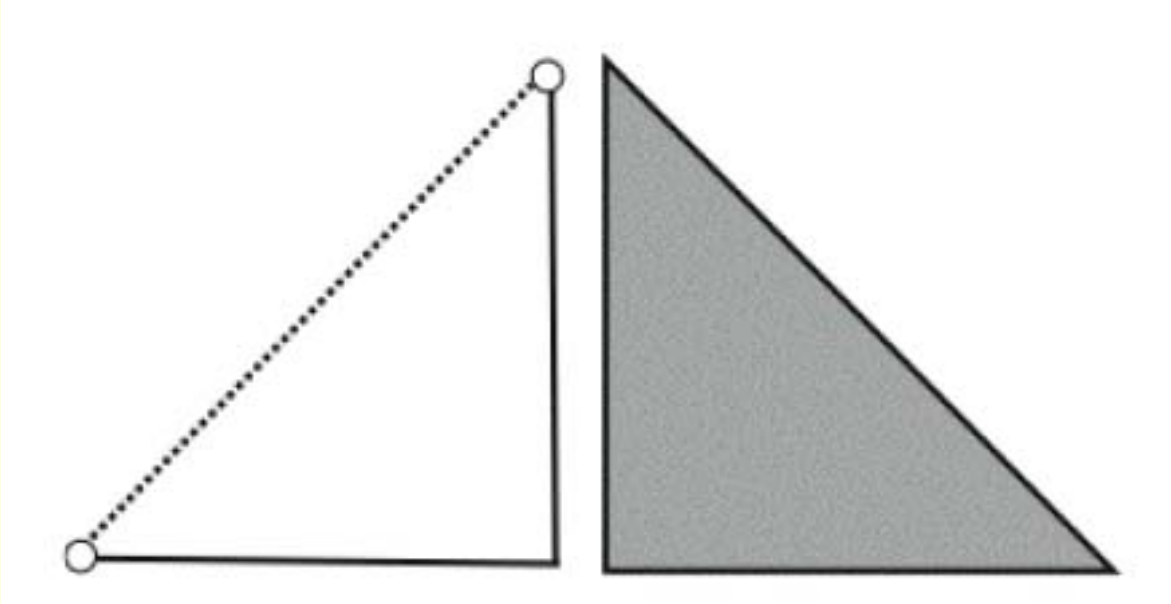
類似地可證明單位圓盤分段全等於單位圓盤去掉沿半徑方向的線段（長度小於半徑長，不含圓內的端點）。

正方形與等腰三角形分段全等



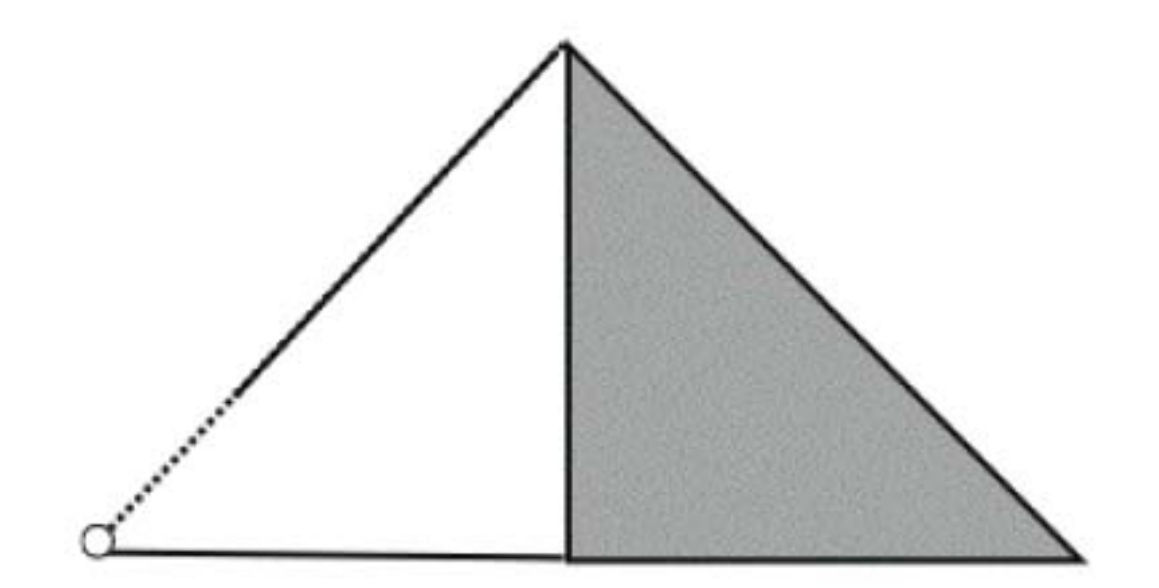
把對角線分配給一個三角形

正方形與等腰三角形分段全等



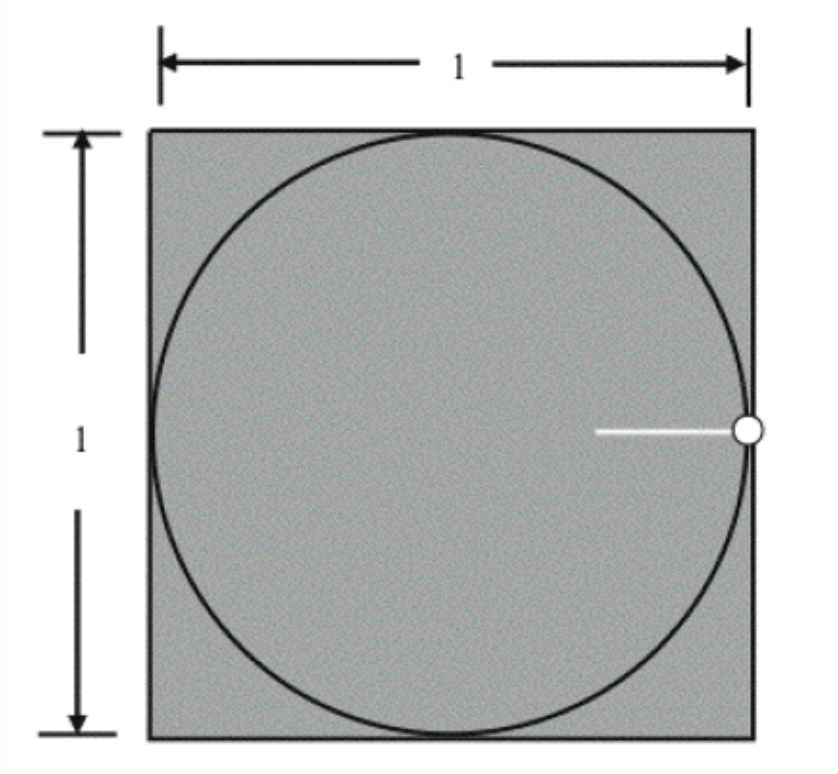
拿掉一條垂直的高

正方形與等腰三角形分段全等



現在還缺一條線段，其長度為 $\sqrt{2}-1=0.41.....$

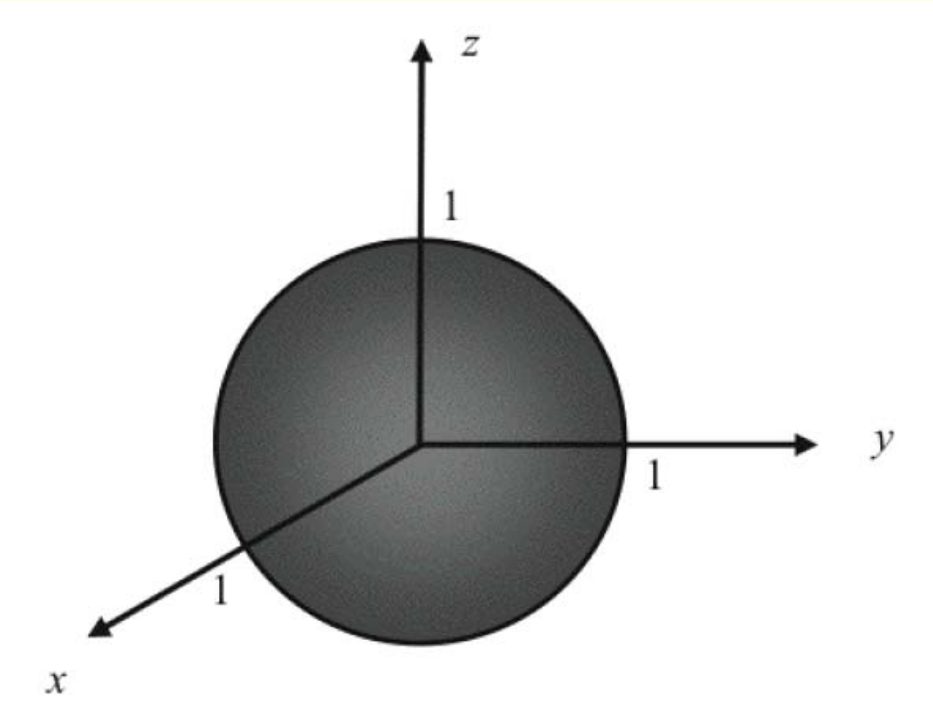
正方形與等腰三角形分段全等



先把所需的線段從正方形裡劃分出來。

球體

令 $B = \{ (x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \}$，稱 B 是（以原點為心的）單位球體。



巴拿赫—塔斯基定理

一個單位球體 B 可以劃分成兩個不相交的集合 $B = B_1 \cup B_2$，使得 $B \sim B_1$ 且 $B \sim B_2$ 。

1947年R. M. Robinson證明單位球體只需劃分成五塊（其中一塊只是一個點），便足以重組成兩個單位球。

巴拿赫—塔斯基定理的推廣

任何三維空間裡的集合 A 與 B，只要它們足夠小到可以裝進一個球裡（也許那個球極端巨大），又足夠大到可以包容住一個球（也許那個球極端渺小），那就可以把 A 劃分成有限個子集合，重新組裝成集合 B。

巴拿赫—塔斯基定理為何不是悖論？

如果把單位球的體積當做1，分成有限子集合之後，各個子集合的體積加總仍然等於1，重新組裝時不會改變體積，但最終產生兩個單位球的總體積卻是2，難道不是矛盾嗎？

巴拿赫—塔斯基定理為何不是悖論？

巴拿赫與塔斯基在證明的過程裡，必須訴諸選擇公設（axiom of choice）來保證一些奇形怪狀集合的存在性，但是體積的概念對它們並不適用，它們也就是所謂的不可測度集合。因此前面把各個子集合的體積加總，是根本沒有意義的步驟，所以也無法導出矛盾。

現有 Banach-Tarski 定理的

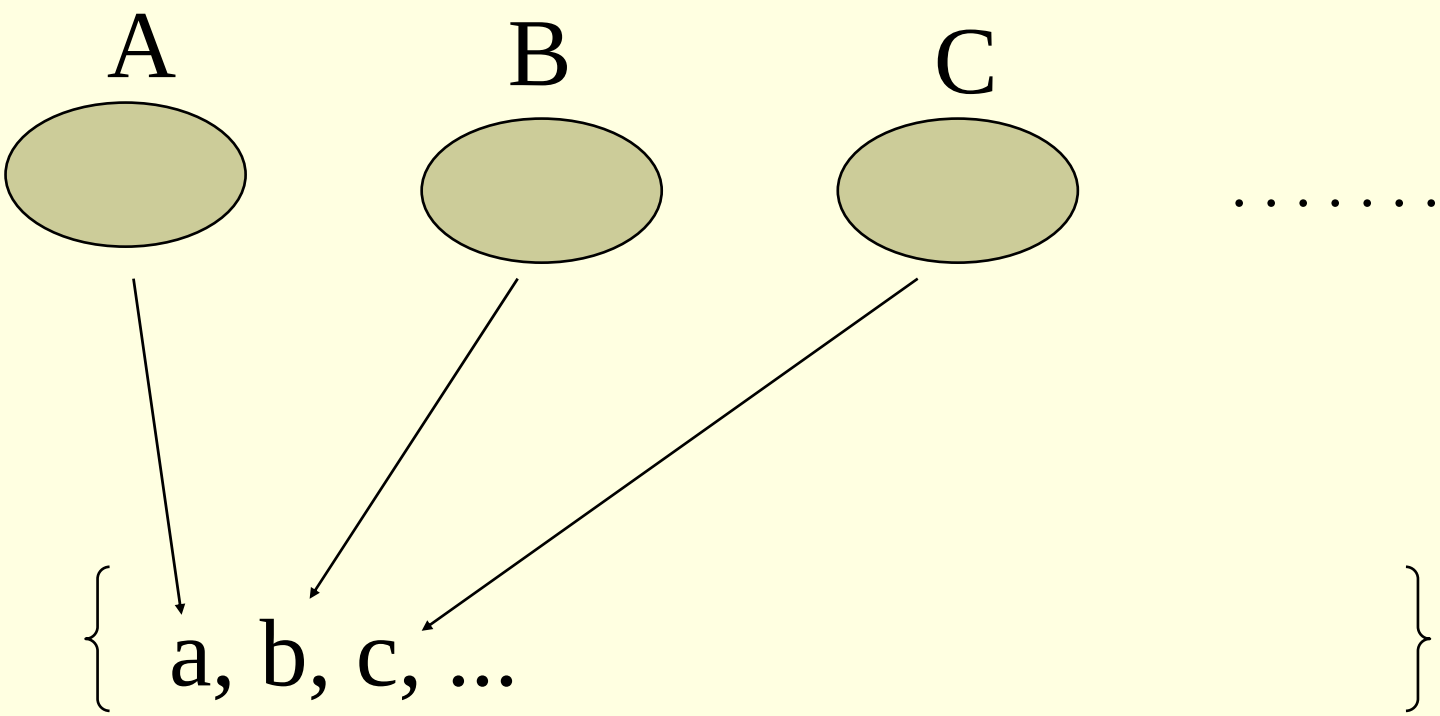
證明都需要用到選擇公設

（Axiom of Choice）

選擇公設（非正式的說法）

已知有很多箱的蘋果，而且每箱都不是空箱，那麼就可以從每一箱裡拿一顆蘋果出來，造成新的一箱蘋果。

選擇公設



選擇公設（正式的說法）

令 **M** 是某些非空集合構成的集合，則存在一個選擇函數

$$f : \mathbf{M} \to \cup\{A : A \in \mathbf{M}\}$$

使得對於所有 $A \in \mathbf{M}$，都滿足

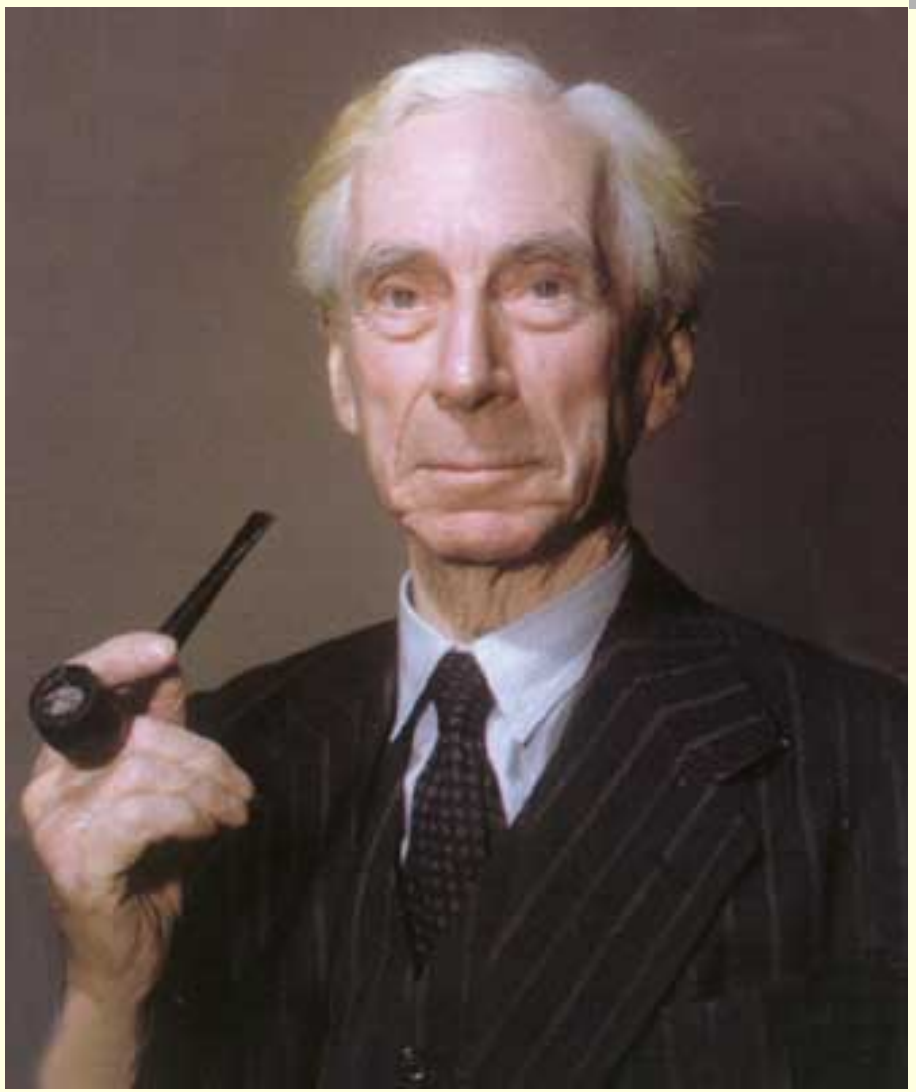
$f(A) \in A$ 。

無窮集合帶來困擾（羅素舉的例子）

從無窮雙鞋裡每雙選一隻鞋不需要選擇公設，選右腳那隻就好。

從無窮雙襪子裡每雙選一隻襪子就需要選擇公設了。

Bertrand Russell (1872–1970)



選擇公設的效用

許多基礎性的數學定理的證明須用到它，例如：

每個向量空間都有基底。

非空集合的卡氏積為非空的。

對與任何集合 A 與 B 而言，下列三種可能性之一必然成立：$|A| > |B|$、$|B| > |A|$、$|A| = |B|$。（$|A|$ 表示 A 的基數。）

選擇公設（顯然嗎？）

選擇公設保證了不可測度集合的存在。

用選擇公設可推導出巴拿赫—塔斯基定理這種跟直覺很不相合的結果。

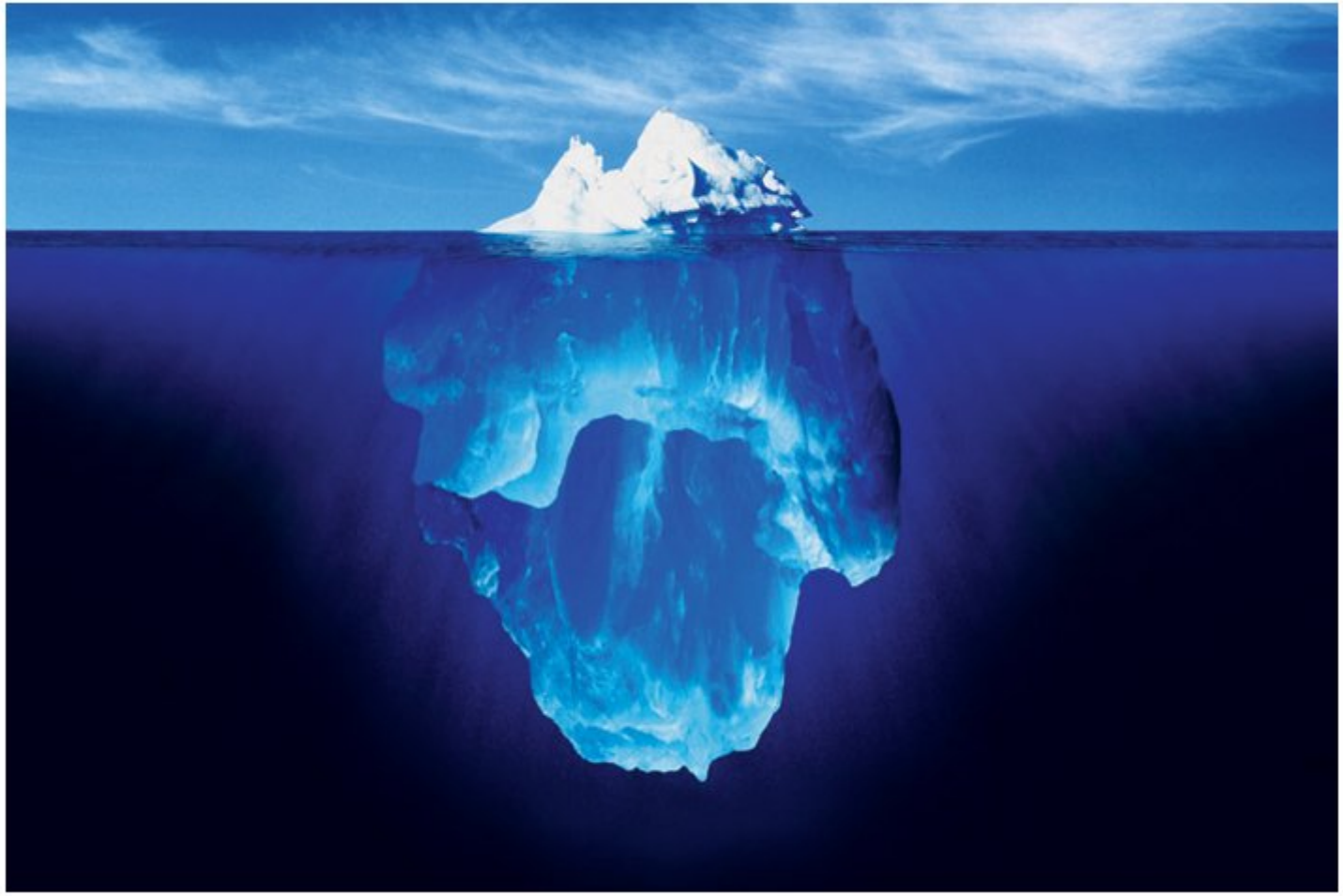
數學空間 ≠ 物理空間

數學空間可以無窮細分，使得不可測度集合成為可能。

物理空間因為基本粒子種類有限，所以不可能無窮細分，也就不會有不可測度集合，因而作不出巴拿赫—塔斯基定理的分割。

I CARVED AND CARVED, AND THE NEXT THING I KNEW I HAD TWO PUMPKINS.
I TOLD YOU NOT TO TAKE THE AXIOM OF CHOICE.

現代數學以集合論為基礎



樸素集合論的創始者康托
Georg Cantor (1845–1918)

羅素悖論（ Russell's Paradox）

令 **R** 是「所有自己不屬於自己的集合所構成的集合。」也就是說 A 是 **R** 的元素若且唯若 A 不是 A 的元素：

$$\mathbf{R} = \{ A \mid A \notin A \}$$

羅素悖論： $\mathbf{R} \in \mathbf{R} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{R} \notin \mathbf{R}$

用公設法重建集合論

Zermelo-Fraenkel 的集合論

（簡稱 ZF集合論）

Ernst Zermelo (1871–1953)

Adolf Fraenkel (1891–1965)

Zermelo-Fraenkel 公設化集合論

1、（外延公設）若 X 與 Y 有同樣的元素，則 $X = Y$。

2、（元素對公設）對於任何 a 與 b 而言，存在一個集合 $\{a,b\}$ 恰包含 a 與 b 兩個元素。

3、（子集合公設）若 φ 是一個（具有參數 p）的性質，則對於任何 X 與 p，都存在一個集合 $Y = \{u \in X \mid \varphi(u,p)\}$。

Zermelo-Fraenkel 公設化集合論

4、（聯集公設）對於任何集合 X 而言，存在集合 Y 是所有 X 的元素的聯集。

5、（冪集合公設）對於任何集合 X 而言，存在集合 Y ，它的元素是 X 所的有子集合。

6、（無窮公設）存在一個無窮集合。

Zermelo-Fraenkel 公設化集合論

7、（取代公設）如果 F 是一個函數，則對於任何集合 X 而言，存在集合 $Y = \{F(u) \mid u \in X\}$。

8、（基礎公設）對於任何非空集合 X 而言，存在 $\in$ 極小元素。

選擇公設與 ZF 集合論的關係

葛德爾（1940）證明：

ZF 集合論的公設，再加上選擇公設，不會導出矛盾。

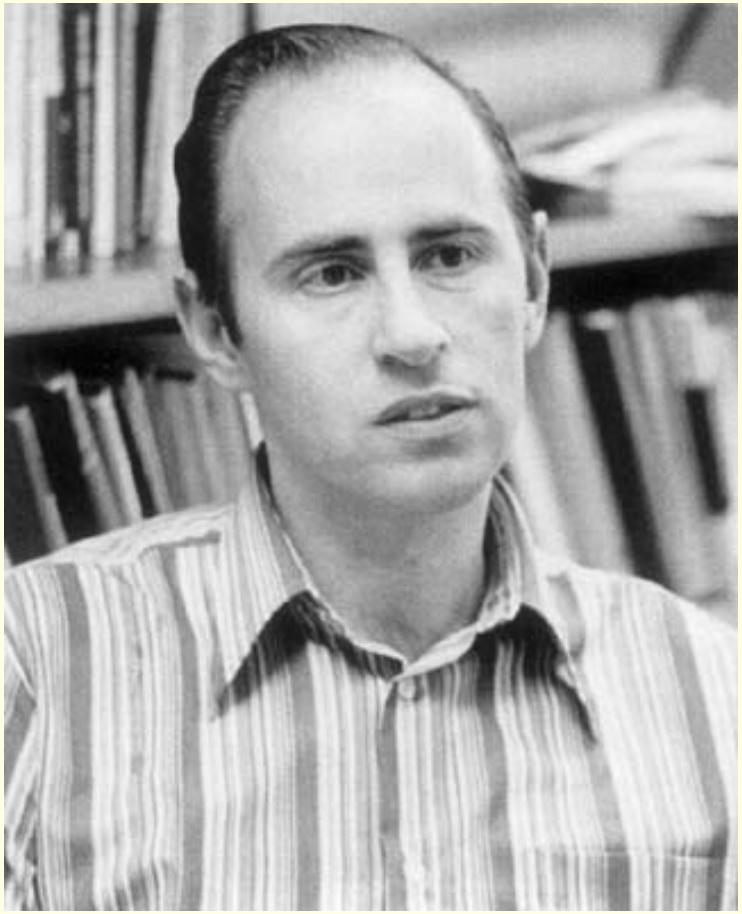
Kurt Gödel (1906–1978)

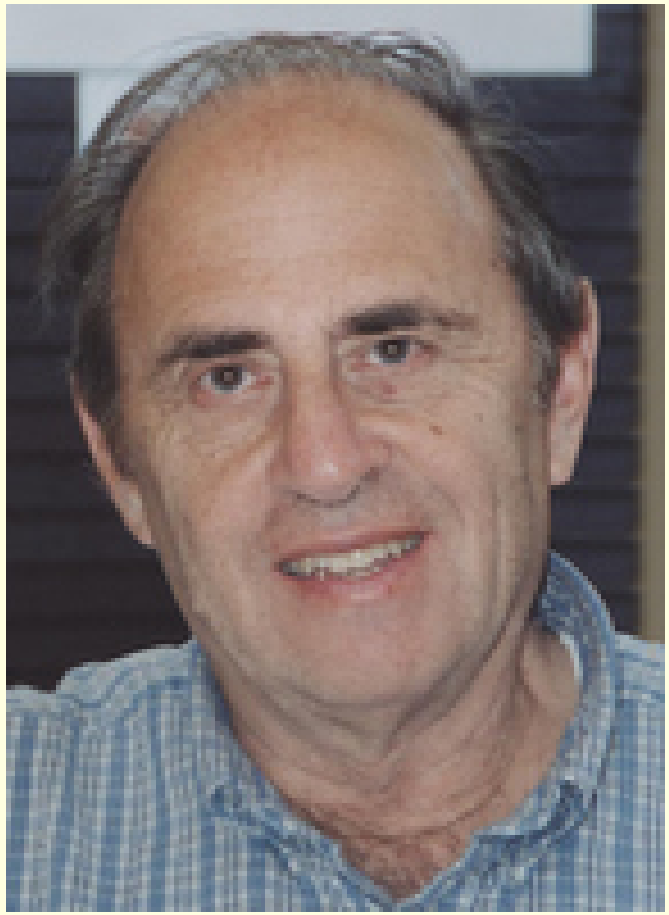
選擇公設與 ZF 集合論的關係

柯亨（1963）證明：

ZF 集合論公設，再加上選擇公設的否定命題，也不會導出矛盾。

Paul J. Cohen (1934–2007)

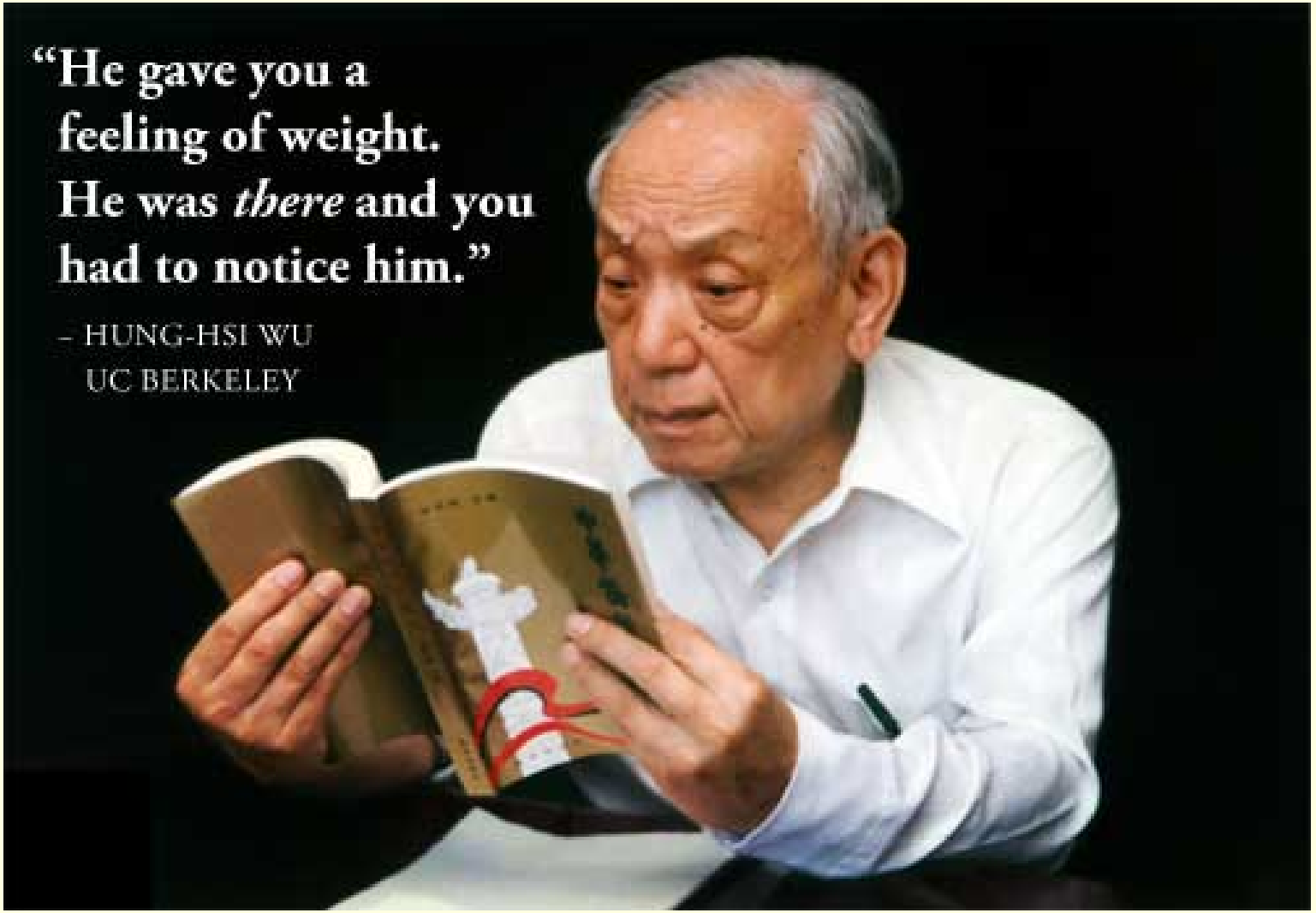




選擇公設與 ZF 集合論的關係

結合葛德爾與柯亨的結果，可知選擇公設獨立於 ZF 集合論。也就是說 ZF 集合論的公設，再加上選擇公設不會導出矛盾。 另外，ZF 集合論的公設，再加上選擇公設的否定命題，也不會導出矛盾。

陳省身 (1911–2004)



謝謝聆聽