

公平：一場思辯之旅

比例原則？
談摸魚
何謂「公正骰子」
分賭金的問題
分馬
何謂公平？
「公平」的投票制度？-當西斯汀屋頂的白煙升起…

國立彰化師範大學數學系
連怡斌

某位網友在BBS上寫道：

- 昨天晚上在讀微積分,讀到頭痛不已時
.....
- 突然把一切都想通了.....

- 我發現.....其實微積分根本就是外星人的陰謀.....
- 根據我的推測.....以人類的腦結構.....
- 根本就沒辦法了解微積分....
- 微積分根本就是外星人的科技.....

- 他們偽裝成微積分老師.....大學校長.....教育局官員.....
- 說什麼微積分是科學之本.....
- 其實微積分根本就是一種毀壞人腦的生化武器.....

- 當我們在碰上微積分問題時.....
- 為什麼會感到頭痛呢?
- 這時就是微積分的癌細胞開始侵入你的腦細胞.....
- 接著感到坐立不安.....冒冷汗.....其實這時你已經全身感染了.....

01-5

- 所以.....我決定了.....
- 基於地球人的尊嚴與宇宙的和平正義.....
- 明天早上的微積分我不去上了.....

01-6

自我介紹

- 荒野保護協會創會理事、台中分會前會長
- 世界童軍總會 亞太區活動委員會 主席
- 中華童軍總會 國際委員
- 彰化師大數學系/統計資訊所
- 地球反抗外星人地下組織特派員

01-7

比例原則



- 趙大和小李是好朋友，天兩人一起出外旅行。
- 趙大帶了3個麵包、小李帶了2個麵包，經過樹林休息時，
- 正好有一人趕路經過，因為肚子太餓了，求他們分他一些麵包吃。
- 趙大和小李答應了，三人坐著聊天，高高興興的把5個麵包都吃完了。

公平：一場思辯之旅

2.8

- 趕路人吃過麵包，滿足又快樂，就出200塊給他們做謝禮，又匆忙趕路去了。
- 趙大算了一下，把80塊分給小李，自己拿了120元；
- 意思是，自己出了3個麵包，小李才出2個，照比例3:2，自己應拿3/5。
- 可是小李不服氣，他認為兩人一起請客，得了報酬就應該1比1對分。
- 兩人誰也不肯讓，就鬧到警察局去
- 如果你是警察，你會怎麼裁定？

警察甲裁定：

- 小李只能得40元，趙大得160,理由如下：
- 三個人一起吃，假設把每塊麵包切成3片，共15片分給三人吃。每人平均5片。
- 趕路人吃到的部分(5片)，只有1片是小李貢獻的，其他4片是趙大貢獻，
- 比例上趙大應得4/5



- 趙大的分法：根據總投資額比例（股份）
 - 3:2
- 小李的分法：根據投資人數比例
 - 1:1
- 警察分法：根據淨投資額（扣除成本）比
 - 4:1
- Q：何謂公平？

警察乙裁定：

- 一個麵包多少錢？假設10元/個
- 趙大小李各拿回30、20，剩下的200元扣掉50元成本=150，再「按比例分」
- 這時，按何種比例較恰當？
 - 投資人數比例 1:1?
 - 總投資額比例 3:2?
- 若麵包1個40元或以上，扣除成本後依人頭
 - 趙大分法
- 若麵包1個0元，扣除成本後依人頭
 - 小李分法

警察丙裁定：

- 兩人猜拳，贏的人先將200元分成兩份
- 但猜輸的人優先取選其中一份
- 若小李來分，他會怎樣分對自己較有利？
- 如果趙大來分，他會怎樣分
- 這樣有較公平嗎

保險人員丁的建議

- 警察局剛好有位保險公司人員在替客戶（我）辦理賠
- 他建議，將200元交給他的保險公司，抽x元手續費，
- 未來這兩位，誰先因病住院，保險公司就發給誰剩下的200-x元
- x可以是0--保險公司賺利息就好

- 這類似阿里巴巴故事中四十大盜的作法，
- 將得到的錢存在某山洞中，等退休後再來拿--造福未來的自己
- 我的建議
- 將200元捐給荒野保護協會--造福後代子孫

保險的由來

- 17世紀英國的海上活動十分頻繁
- 在世界各地經商或航海探險，
- 許多船隻沒有平安歸來，
- 進而造成很大的社會問題，
- 貨物損失造成商家經營的困境，
- 人員罹難造成家屬生活無以為繼，
- 當時，許多的船家、商號便集合起來成立了一個“協會”，會員都出一份錢，當有船隻遇難時，就將這一大筆錢用來幫助不幸的商家及船員渡過財務上和生活上的難關，
- 這制度和不斷的精神改良後，發展出今天保險。



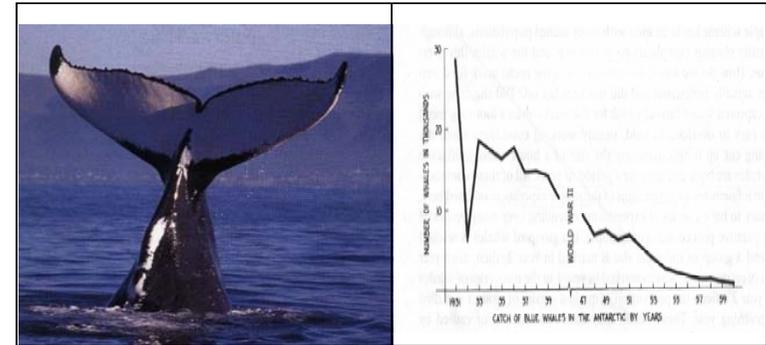
公正骰子

- 趙大、小李、甲乙丁、我，6種方案，都有某種程度公平性
- 丟「公正骰子」決定哪種。

公平：一場思辯之旅

2.17

南冰洋「抹香鯨」剩多少



World War I 後，抹香鯨捕獲量逐年遞減

18

在生態保育上的應用

- **Question: 1**, 南冰洋現有幾隻藍鯨?
- 2, 每年出生? 隻
- 3, 自然死亡的有幾隻?
- 4, 經由這些出生率及死亡率
- , 人類應如何控制捕獲量?

19

池塘中有 n 條金魚

- 抓10隻作記號後放回；打散後，再抓10隻，發現其中有5隻有作記號。
- (a) 假設每次只抓1隻魚，觀察後放回，再抓下一隻。估計 n 。
- (b) 假設一次抓10隻魚，同時觀察（或取出不放回）。估計 n 。

20

二項分佈 Binomial

- (i) n次獨立試驗,
- (ii)每次試驗只有兩種結果：成功或失敗，正面或反面等，
- (iii)每次成功的機率皆相同 (p)
- 以 Bin (n,p) 表示之。
- 銅板丟5次，令X為H的個數，則X=0,1,2,3,4,5的機率？

21

二項分佈 Binomial

- 銅板丟5次，令X為H的個數，則X分別為0,1,2,3,4,5的機率？

$$P(X = 0) = C_0^5 p^0 (1-p)^5$$

$$P(X = 1) = C_1^5 p^1 (1-p)^4$$

$$P(X = 2) = C_2^5 p^2 (1-p)^3$$

$$P(X = x) = C_x^n p^x (1-p)^{n-x}$$

22

池塘中有 n 條金魚

- 抓10隻作記號後放回；打散後，再抓10隻，發現其中有5隻有作記號。
- (a) 假設每次只抓1隻魚，觀察後放回，再抓下一隻。估計 n。
- X=抓到有記號的數目，則X是否為二項？

$$P(X = 5 | n) = C_5^{10} \left(\frac{10}{n}\right)^5 \left(1 - \frac{10}{n}\right)^{10-5}$$

- $P(X=5|n=19)=0.2427$
- $P(X=5|n=20)=0.2461$
- $P(X=5|n=21)=0.2433$

23

(b)不放回

有記號	無記號
10	n-10
↓	↓
5	5

$$P(X = 5 | n) = \frac{C_5^{10} C_5^{n-10}}{C_{10}^n}$$

- $P(X=5|n=18)=0.3225$
- $P(X=5|n=19)=0.3437$
- $P(X=5|n=20)=0.3437$
- $P(X=5|n=21)=0.33$

24

其他抓法

- (C)一次抓一尾，直到5尾有記號被抓到就停。結果共抓了10尾。估計 n 。

$$P(Y = 10 | n) = C_4^9 \left(\frac{10}{n} \right)^5 \left(1 - \frac{10}{n} \right)^{10-5}$$

- (D)給他一個小時去抓。結果共抓了10尾，其中5尾有記號。估計 n 。
- 二項分布、超幾何分布、負二項分布、卜松分布

25

全民福利 universal benefit

- 只要符合公民身份和是目標對象就可以享受，不考慮收入和經濟條件的一種福利，
- 簡單而言，就是人人有份。
- 這樣看來甚是公平。可是有人提出，為甚麼有錢人—一些根本不需要福利去存活的人—也可以領取福利呢？
- 公平是否應該讓有需要的人領福利，而不會將公帑浪費在沒有需要的人身上？

公平：一場思辯之旅

2.26

排富條款

- 英國有項universal benefit叫child benefit凡是英國公民的子女都可以領取。
- 頭一胎每星期20英鎊，之後的每人每星期13英鎊到十六歲。後仍繼續學業，這福利會維持到二十歲。
- 保守黨上台，宣稱這種universal benefit其實並不公平，因為有很多錢都是發放給沒有需要的家庭—就是上中產和有錢人。於是他們提出改革，

公平：一場思辯之旅

2.27

- 若父母當中有人年薪超過42萬英鎊，則不再合資格領取。他們認為，這種讓有需要的家庭才可以領取的制度，是更為公平。
- 你認為這樣較公平嗎

公平：一場思辯之旅

2.28

- 當以收入來決定發放時，要劃一條「不需要福利」這條線。
- 你怎樣決定42萬是一個合適的界線呢？
- 年入42萬和41萬5千的人根本就沒大分別，為何他有而他沒有呢？
- 若夫婦二人的年薪各40萬，總收入為80萬，他們仍合資格領取child benefit。
- 另一個家庭，夫婦1人出外工作收入45萬，另1人做家庭主婦/夫。雖然總收入遠比那80萬的家庭低，但就不可以再領child benefit了。這樣又是否真的更公平？

公平：一場思辯之旅

2.29

何謂「公正骰子」(fair dice)

- A. 不管誰來丟，丟出的點數大家都一樣。
- B. 不同人丟出來的點數常常不太相同；但得到最高點（及其他任何一點）的機會每人都一樣。
- C. 丟出1點、2點...6點的機率，皆是六分之一
- 公正銅板：fair coin



公平：一場思辯之旅

2.30

分賭金的問題



- 法國貴族梅雷(Mere)向巴斯卡(Pascal, 1623-62)提出一個有關於賭博丟骰子的問題。
- 巴斯卡寫信去問費馬(Fermat, 1601-1665)此問題，從此展開兩人間著名的通信。
- 巴斯卡及費馬二位法國的大數學家對這種問題的感興趣，刺激了歐洲不少數學家也開始探討類似的問題，進而開創了機率論的起源

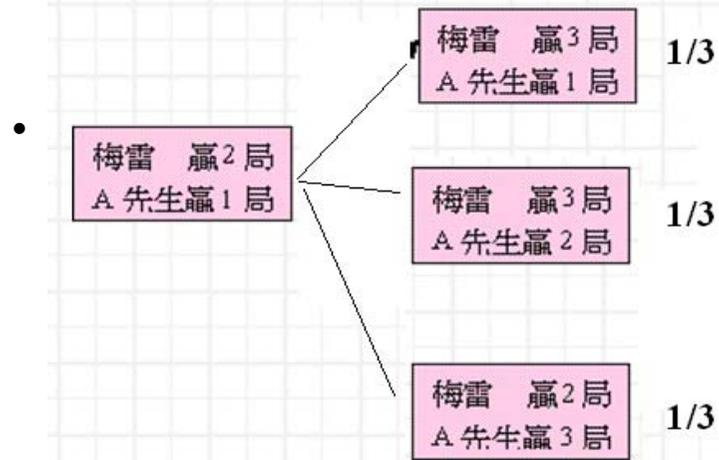
公平：一場思辯之旅

2.31

- 梅雷說有一次他與某賭友(以下代稱A)擲骰子時，各押32個金幣為賭注，
- 雙方約定如果誰先贏得3局，就可以把賭金全部拿走，
- 但因為警察來臨檢，所以賭局不得不中途中斷。
- 此時梅雷已經贏得2局，而A先生只贏1局，兩個人為了如何公平分配賭金有所爭執。
- 你會如何裁決？

公平：一場思辯之旅

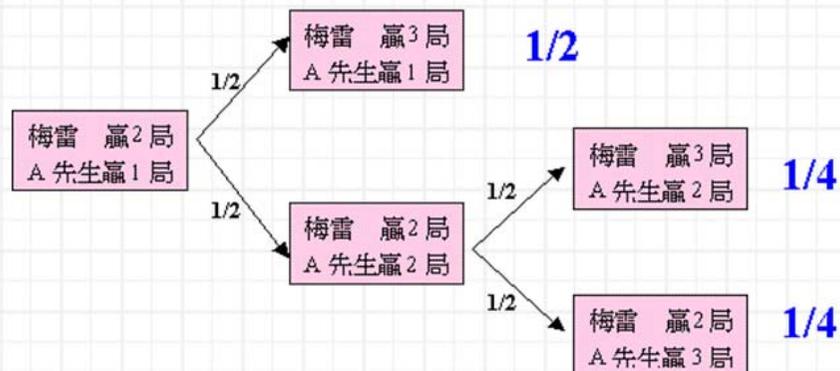
2.32



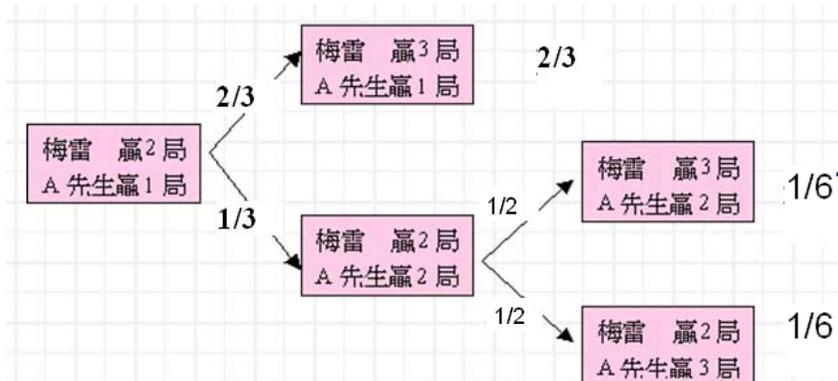
- (A)
- 梅雷贏的情形有2種，A贏的情形只有1種，
- 因此梅雷可以拿走全部賭金的2/3，A只可以拿走1/3

- 但梅雷卻認為，即使下一局A贏了，也只是處於平手狀況，因此他有權拿走全部賭金的1/2，
- 而下一局雙方皆有一半贏的機會，因此梅雷又可以再拿走剩下賭金的1/2（共拿全部賭金的3/4），而A可拿走1/4，
- 誰說的是對的呢？

- (B)
- 梅雷贏的可能性為 $1/2 + 1/4 = 3/4$ ，因此可以拿走賭金的3/4，
- A贏的可能性為1/4，所以只可以拿走 $64/4 = 16$ 枚金幣



- (C)
- 梅雷贏的可能性為 $2/3 + 1/6 = 5/6$ ，故可以拿全部賭金的5/6，
- A贏的可能性為1/6





- (D)
- 由目前領先的人（梅雷）全拿
- (E)
- 賭金全拿的前提為贏3場，
- 離開前沒人贏3場，故所有論述接不成立，
- 退回原始狀況：兩人各拿原有的一半回去。
- ...
- Jodomade，如果是有外界獎金，5戰3勝的比賽呢

分馬



- 有位愛馬的阿拉伯老人很會養馬，生平沒什麼財產，只有17匹很漂亮馬，由3個兒子協助照料。
- 老人臨終前告訴3個兒子：
- 「我有17匹駿馬要分給你們。我觀察很久，
- 老大平均每天花二分之一時間（12hr）幫忙照顧，
- 老二平均每天花三分之一（8hr），
- 老三平均每天花九分之一（2hr 40min）。

- 所以要把二分之一分給老大，老二得三分之一，老三得九分之一。」
- 老人過世後，三個兒子想破頭都想不出要怎麼分，
- 1. 你可不可以幫他們想出一個好的分法？
- 2. 你覺得老人這樣分「不公平」？
- $1/2 + 1/3 + 1/9 = 17/18$. 假設老人原來還要將18分之1分給某人，但某人放棄繼承...

分法1：依長幼次序拿

	拿走		剩下	
	馬	馬肉	馬	馬肉
老大先拿17/2	8	1/2	8	1/2

	拿走		剩下	
	馬	馬肉	馬	馬肉
老大先拿17/2	8	1/2	8	1/2
老二再拿17/3	5	2/3	2	1/2+1/3

	拿走		剩下	
	馬	馬肉	馬	馬肉
老大先拿17/2	8	1/2	8	1/2
老二再拿17/3	5	2/3	2	1/2+1/3=5/6
老三再拿17/9	1	8/9	0	1/2+1/3+1/9

- 很公平，但
- 白白浪費了3匹駿馬

分法1：依幼長次序拿

	拿走		剩下	
	馬	馬肉	馬	馬肉
老三先拿17/9	1	8/9	15	1/9

	拿走		剩下	
	馬	馬肉	馬	馬肉
老三先拿17/9	1	8/9	15	1/9
老二再拿17/3	5	2/3	9	1/9+1/3

	拿走		剩下	
	馬	馬肉	馬	馬肉
老三先拿17/9	1	8/9	15	1/9
老二再拿17/3	5	2/3	9	1/9+1/3=4/9
老大再拿17/2	8	1/2	0	1/9+1/3+1/2

- 很公平，但
- 同樣浪費了3匹駿馬

- 三個兒子後來去請教父親的老友，一位數學家。
- 老數學家笑笑的說，這樣吧，我有匹老馬，姑念我和你父親是好友，就一起也送給你們好不好。
- 三個兒子想，這樣我們又沒損失，反而有賺，樂得答應。

- 數學家接著說，那再來就好辦了，18匹，
- 老大得9匹（二分之一）
- 老二得6匹（三分之一），
- 老三得2匹（九分之一）。
- 比原來的8, 5, 1好！
- 你們三人共得 $9+6+2=17$ 匹，還剩下一匹，
- 姑念你父親和我是好友，就把那匹老馬再送還給我好了。



公平：一場思辯

Why?

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{17}{18} \quad \text{沒分完}$$

依比例：
重分配

$$1 / \frac{17}{18} = \frac{18}{17} \rightarrow \frac{18}{17} \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{17}$$

$$\rightarrow \frac{18}{17} \cdot \frac{1}{3} = \frac{6}{17}$$

$$\rightarrow \frac{18}{17} \cdot \frac{1}{9} = \frac{2}{17}$$

公平：一場思辯之旅

• 分法3：四捨五入

	拿走		剩下	
	持分	實拿	馬	
老大先拿 $17/2$	8.5	9	8	
老二再拿 $17/3$	$5+2/3$	6	2	
老三再拿 $17/9$	$1+8/9$	2	0	

公平：一場思辯之旅

• 分法3：無條件捨去

	拿走		剩下	
	持分	實拿		
老大先拿 $17/2$	8.5	8	9	
老二再拿 $17/3$	$5+2/3$	5	4	
老三再拿 $17/9$	$1+8/9$	1	3	

公平：一場思辯之旅

• 19匹馬時：四捨五入

	拿走		剩下	
	持分	實拿	馬	
老大先拿19/2	9+1/2	10	9	
老二再拿19/3	6+1/3	6	3	
老三再拿19/9	2+1/9	2	1	

• 19匹馬時：無條件捨去

	拿走		剩下	
	持分	實拿		
老大先拿17/2	9+1/2	9	10	
老二再拿17/3	6+1/3	6	4	
老三再拿17/9	2+1/9	2	2	

• 19匹馬時：無條件進位

	拿走		剩下	
	持分	實拿		
老大先拿17/2	9+1/2	10	9	
老二再拿17/3	6+1/3	7	2	
老三再拿17/9	2+1/9	3	-1	

何謂公平？

- 亞里斯多德 (Aristotle) 的公平正義定義是將公平與美德、道德結合，
- 然而自由主義論者，乃至J. Rawls都將公平分配與道德應得分開來看，
- 這是現代政治哲學與古代政治哲學的差別。

1. 個人福利的最大化：

- 這種正義觀源自新古典經濟學的“方法論的個人主義”，
- 其認為社會的總體福利（公共利益）等於個體福利的加總；
- 因此，當社會中每個人的福利達到最大化，就是社會總體福利的最大化

2. 保障基本福利：

- 保障基本福利係指社會中某些人在擴大自身福利時，卻不惡化其他人的福利。
- 它主張透過市場完全競爭，市場運作最有效率，且政府介入保障最弱勢者的基本數量福利

3. 淨福利的最大化：

- 源自於福利經濟學，它修正了保障基本福利的公平原則。
- 若一個社會能有效地創造淨利益（全部效益減去全部成本），
- 並且將該淨利益用來補貼競爭過程中受損失的團體或個人，則社會狀態就是合乎公平的。

4. 重分配福利的最大化：

- John Rawls：
- 政府將福利重分配給社會中較具弱勢者，並使弱勢者的重分配利益最大化，則該社會狀態就合乎公平正義。

小結：

- 個人福利的最大化之缺點往往是
- 它保障天生優勢者的福利，
- 弱勢者在立足點就無法與之競爭，且公共資源之有限性無法提供每個個人的福利最大化；
- 保障基本福利之缺點
- 是現實世界不存在「不惡化其他人的福利」
- 在資訊不對稱、外部不經濟等現象下，變得無可能；

- 淨福利的最大化之缺點是
- 人的理性有限，如何得知所有受損失的標的人口有其難度（外部成本不易衡量）；
- 重分配福利的最大化則不具有上述缺點，
- 但該種公平正義會照顧到某些不值得照顧的弱勢（例如懶惰成習以致貧窮）
- 在政策執行上則較為可行。

- 教育政策需考量弱勢族群的議題，給予積極的差別待遇，
- 就Rawls「公平正義」理論的應用而言，若要制訂出符合「社會正義」的教育政策，重視弱勢族群的需求是必須的。
- 為讓弱勢者能夠獲得最大福利，必須採取「積極的差別待遇」政策，
- 對於原住民、身障者及其他弱勢族群之教育，應考慮其自主性及特殊性，提供教育弱勢者較多的福利資源與學習機會。

所得重分配？

- 有對老夫婦要出遠門看孫子，
- 離家數周擔心家中遭竊，翻箱倒櫃損壞了家具，
- 出門時在桌上放下百元鈔票一張，留言道：
- 「爬窗而入的俠行客，我們是退休教師，靠退休金生活，
- 家景清寒，沒什麼錢，您來一趟不容易，
- 桌上的一百元就當給您的走路勞務費。



- 若您想擴大戰果，本層對面是鐵道部的一位高官，樓上是紅十字會的領導，樓下那家是銀行的行長。
- 他們呢～都很有錢！而且還不敢報案……。」
- …
- 屋主人月餘歸來，發現桌子上的錢變成十萬元
- 也附張紙條上寫著：「感謝老師的教誨，過去不用功讀書，唉！相識恨晚吶……」

一切盡在不言中，特留下十萬元信息費，請笑納！」



有沒有「公平」的投票制度？

- 諾貝爾經濟學獎得主Kenneth Arrow1948年提出不可能定理(Impossibility Theorem)，
- 證明只要候選人超過兩人的話，便很難設計一個公平的選舉制度，足以確保最受歡迎的候選人必定突圍而出。

簡單多數票法 (Plurality Vote)

- 選民在多名候選人中只可投一人，最多票者勝
- 缺點: 搞局者或B隊的出現，來分薄對手的票源。
- 2000年時，綠黨Nader出選美國總統，其意念與當時民主黨高爾相近，結果吸去高爾不少票。
- 喜歡Nader的選民，大多喜愛高爾多於共和黨的喬治布希，但Nader的出現，卻令高爾由穩勝布希，變成五五波，最後更因為些微具爭議性的票數輸給布希。

- 最強候選人因為出現搞局者分票源而輸去選舉，非個別事件，
- 估計過去四十多次美國總統選舉之中，至少5次出現了這種情況，超過10%

認可投票制

- 是另一種二元投票制的方法，
- 選民可以投給每一個候選人，取得最多認可的候選人當選。
- Q：想想他可能出槌的狀況。

決賽投票制

- 以多回合的多數決選舉來確保當選者是由多數(過半數)支持。
- 前兩名決賽的投票是常用的選舉方法，假如沒有過半數的獲勝者出現，便由得票數前兩名的候選人再次進行決賽。
- 在淘汰決賽選舉裡，名次最後的候選人會被逐一淘汰，直到出現過半數為止。
- 而在消耗性決賽選舉裡，沒有候選人會被淘汰，因此選舉將不斷重複直到出現過半數為止。

天主教教宗選舉

- 教宗請辭或過世後，教廷延續傳統，舉行樞機主教閉門會議推舉新任教宗。



- 教宗選舉會議被稱為conclave，源自拉丁文「用鑰匙上鎖」，
- 意指樞機主教們被鎖在與外界隔離的場所中，直到選出新任的教宗為止。

西斯汀禮拜堂

- 這種閉門秘密會議為數百年來推舉教宗的基本模式，且是歷史悠久的非普選菁英選舉方式。
- 樞機主教將在西斯汀禮拜堂閉門開會，門外有瑞士衛兵守護。





- 以前樞機主教只能在沒衛浴設備的小房間搭鋪過夜，現在聖伯多祿大教堂旁宿舍，有舒適環境。

- 選舉團的人數不超過120人。新教宗必須獲得2/3以上的選票，若經33輪投票仍無法選出，
- 34輪起，可以延續2/3決的規定，或讓得票最高兩位進入最後決選，但這兩位無投票權。
- 一旦有樞機主教獲得2/3的選票，主教團團長會請示他是否願意接受這任務。
- 選舉結束時，會用一根繩子串起所有選票，然後放進事先準備好的火爐裡燃燒，當西斯汀屋頂煙囪放出白煙時，表示新教宗誕生了。

- 近代華人，出殯儀式最盛大的是誰



- 2013年3月13日，在西斯汀禮拜堂的上方，從煙囪口冒出白煙，12億天主教徒有了新教宗，
- 115位樞機主教將原阿根廷樞機主教伯格里奧(Jorge Bergoglio)送上了教宗大位。

EXCEL 模擬教宗投票

		假設2位候選人		某人第m輪	某人m輪內
投票人數	當選門檻	支持A之機率	投票次數m	當選之機率	當選之機率
100	0.66	0.5	1	0.0013	0.0013

