承辦單位：國立中山大學應用數學系

答案：

1. $\frac{1}{4}$	2. 11	3. $[1,2]$	4. 3	5. 8
6. 8	7. $\frac{7}{9}\approx 0.778$	8. 10	9. 20	10. $\frac{243}{1024}$
11. 二月	12. 18	13. $\frac{17}{36}\approx 0.472$	14. $36-9\pi\approx 7.74$	15. 9
16. $\frac{5}{3}$	17. 18	18. 9	19. $\frac{2}{5}$	20. 210

注意事項：

1. 本試卷共 20 題計算題，每一題 5 分。
2. 考試時間：10：00～12：00。
3. 請將詳細步驟書寫於題目下方空白處，答案必須化簡並書寫於上方指定處。
4. 請將學校、姓名及報名編號寫在頁尾指定處。

---

1. 有八個數字排成一列，其中每一個數均由前兩數相乘而得到，今天列出最後三個數字，試問第一個數字 ＝ ___①___ ?

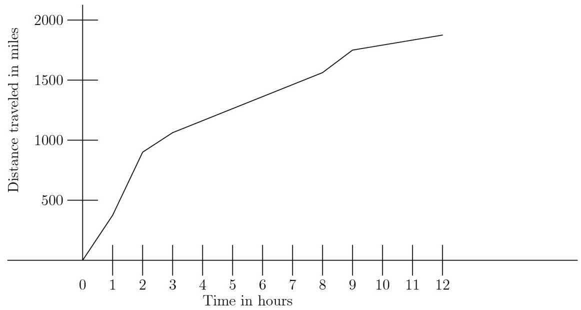
$$\underline{\ ?\ },\ \underline{\quad},\ \underline{\quad},\ \underline{\quad},\ \underline{\quad},\ \underline{\ 16\ },\ \underline{\ 64\ },\ \underline{\ 1024\ }$$

解答： 我們可以用倒推的。$16\times 64=1024$ 倒推後得到 $1024\div 64=16$。故 $64\div 16=4,\ 16\div 4=4,\ 4\div 4=1,\ 4\div 1=4,\ 1\div 4=\boxed{\frac{1}{4}}$。 □

2. 一群學生圍著一圓桌坐著，他們開始傳遞一個裝有 100 顆糖果的袋子，每人輪流拿一顆，再傳給下一個人。如果克莉絲是拿到第一顆和最後一顆糖果的人，假設 $10\le$ 學生人數 ≤ 32，則坐在圓桌邊的學生人數 ＝ ___②___ ?

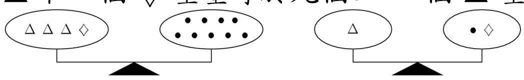
解答： 因爲克莉絲是拿到第一顆和最後一顆糖果的人，則表示學生人數共有 x 人的時候，拿了 y 輪後，共拿了 $xy=100-1=99$ 顆，此時恰好剩一顆留給克莉絲拿。故學生人數爲 99 的正因數，選項中只有 $\boxed{11}$ 滿足。 □

3. 一實驗性飛機旅程，其旅程距離時間如圖所示，試問在下列哪段時間內 ＝ ___③___，飛機的速度爲最快？



解答： 如圖所示，在 $\boxed{(1-2)}$ 之間飛機大概飛了 500 英里。其速度大概是 500 英哩一小時，而其他任一段時間內的速度均不超過 350 英哩一小時。 □

4. 以天秤秤重，若三個 Δ 和一個 $\Diamond$ 重量等於九個$\bullet$，一個 Δ 重量等於 $\Diamond$ 加上 $\bullet$ 的總重。



試問兩個 $\Diamond =$ ____④____ 個 $\bullet$？

解答： 假設 $\Delta = a,\ \Diamond = b,\ \bullet = c$，則

$$3a + b = 9c$$

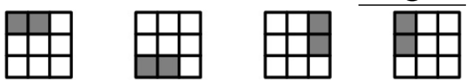
$$a = b + c$$

我們的目標是 $2b$ 可以代換幾個 c，因此我們將上式的 a 換成 $b + c$，得到

$$4b = 6c \Rightarrow 2b = 3c$$

故我們得到 $2\Diamond = \boxed{3}\bullet$。 □

5. 若在一個 3×3 的九個格子中只能塗滿其中兩個格子，以形成一個圖樣，且每個圖樣經過任意旋轉或翻轉後，可以和其他圖樣吻合，則都視爲同一種圖形。如以下例子，此四個圖樣都看做同一種圖形。試問，依此規則可以塗出 $=$ ____⑤____ 種不同的圖樣？

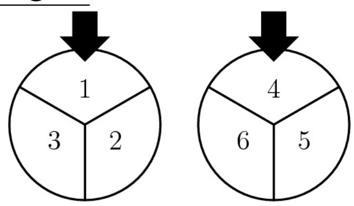


解答： 根據對稱性可以先考慮角落有被塗色的圖樣，共有 5 種。在考慮角落都沒有被塗色的圖樣，共有 3 種。故總共有 $\boxed{8}$ 種不同的圖樣。 □

6. 溫度每升高 3°，某氣體體積就增加了 4 立方公分。如果氣體體積溫度 32° 時候，爲 24 立方公分，則溫度爲 20° 時候，氣體體積 $=$ ____⑥____ 立方公分？

解答： 變化率爲每 3° 變化 4 立方公分，現在的溫度變化 $32^\circ - 20^\circ = 12^\circ$，則體積變化了 $12 \times \frac{4}{3} = 16$ 立方公分。因此在 20° 的時候，體積變化爲 $24 - 16 = \boxed{8}$ 立方公分。
□

7. 有兩個轉盤個別被三等分。今天轉動兩旋轉盤停止後將箭頭所指的兩個數字相乘，試問所得到乘積是偶數的機率 $=$ ____⑦____ ？



解答： 已知道奇數 $\times$ 奇數皆爲奇數，偶數 $\times$ 偶數皆爲偶數，奇數 $\times$ 偶數皆爲偶數。第一個輪子轉出奇數的機率爲 $\frac{2}{3}$，偶數機率爲 $\frac{1}{3}$。第二個輪子轉出奇數的機率爲 $\frac{1}{3}$，偶數機率爲 $\frac{2}{3}$。故相乘出現偶數的機率爲 $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \boxed{\frac{7}{9}}$。 □

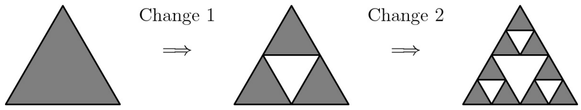
8. 某高級中學的管樂隊有女生 100 人和男生 80 人，而弦樂隊有女生 80 人和男生 100 人。已知道有 60 個女生同時參加管樂隊和弦樂隊，且總共有 230 個學生有參加管樂隊或弦樂隊(至少參加一種樂隊)，試問 = ___⑧___ 位男生參加了管樂隊，卻未參加弦樂隊？

解答： 已知道管樂隊總共 $100 + 80 = 180$ 人、弦樂隊總共有 $80 + 100 = 180$ 人。所以可以知道 $180 + 180 - 230 = 130$ 兩種皆有參加。代表有 $130 - 60 = 70$ 位男生兩種都有參加。有 $80 - 70 = \boxed{10}$ 位的男生只參加管樂隊。 □

9. 一個邊長爲 3 的正立方體，被切成 N 個小正立方體，而所有小正立方體的大小不可以全部相同。如果每個小正立方體的邊長均爲整數，則 $N =$ ＿9＿？

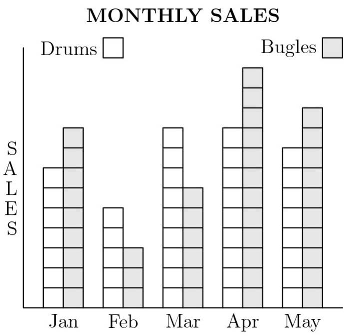
解答： 因爲小正立方體的邊長爲整數，故小正立方體必爲 $1\times1\times1$ 或是 $2\times2\times2$ 的規格。而且必定只有一個邊長爲 2 的小正立方體，觀察原本的正立方體體積爲 $3\times3\times3=27$ 立方公分，邊長爲 2 的小正立方體體積爲 $2\times2\times2=8$，則必有 $27-8=19$ 個邊長爲 1 的小正立方體(其體積爲 1 立方公分)，所以小正立方體共有 $1+19=\boxed{20}$ 個。 □

10. 一個正三角形原來全部塗上黑色。每經過一次的變化，所有的黑色正三角形中間的 $\frac{1}{4}$ 部分的正三角形變成白色。試問經過五次的變化後，原有的面積得幾分之幾 = ＿10＿ 仍然保持黑色？



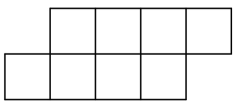
解答： 在經過第一次變化後有 $\frac{1}{4}$ 變成白色，代表有 $\frac{3}{4}$ 仍然維持黑色。而經過第二次變化後，原本黑色的三角形的 $\frac{3}{4}$ 面積有 $\frac{3}{4}$ 仍保持黑色，即原本的 $\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}$ 保持黑色。因此經由五次變化後，原本的面積變爲 $\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}=\boxed{\frac{243}{1024}}$。 □

11. 某個鼓樂團與喇叭樂團爲了旅行分別籌措經費。右圖爲鼓樂團與喇叭樂團之個別銷售紀錄，依據下圖，試求在 = ＿11＿ 月份中，兩團銷售量的相對差額 $\left(\frac{\text{銷售量差額}}{\text{較低銷售量}}\right)\times 100\%$ 之百分比爲最大值？



解答： 兩團銷售量的相對差額即是 $\frac{\text{銷售量差額}}{\text{較低銷售量}}\times100\%$，故可以知道一月的相對差額爲 $\frac{2}{7}\times100\%=29\%$、二月的相對差額爲 $\frac{2}{3}\times100\%=67\%$、三月的相對差額爲 $\frac{3}{6}\times100\%=50\%$、四月的相對差額爲 $\frac{3}{9}\times100\%=33\%$、五月的相對差額爲 $\frac{2}{8}\times100\%=25\%$，故答案爲 $\boxed{\text{二月}}$。 □

12. 八個 1×1 平方單位的正方形磁磚排列，如圖其周長爲 14 單位長。若在原圖形中加入兩個相同大小的磁磚，使得每個加入的磁磚有一邊與圖形中的某個磁磚邊相連，則新的圖形周長 = ＿12＿？



解答：如原圖知道加入新的磁磚最多有兩條邊與原圖形之磁磚邊相連，假設新加入的兩磁磚與其他磁磚相連的邊數分別爲 $x,\ y$：

$$\begin{cases}(x,y)=(2,2)\Rightarrow \text{新周長} &= (14-2-2)+(2+2)=14\\(x,y)=(1,2)\Rightarrow \text{新周長} &= (14-1-2)+(3+2)=16\\(x,y)=(1,1)\Rightarrow \text{新周長} &= (14-1-1)+(3+3)=18\end{cases}$$

每一個 $(x,y)=(1,1)$，新周長爲 $(14-1-1)+(3+3)=\boxed{18}$。 □

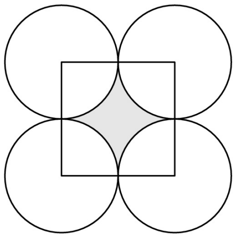
13. 丟兩個骰子則丟出的兩數乘積大於 10 的機率 = ___13___ ?

解答： 假設兩個骰子點數分別爲 $x,\ y$，其中 $1 \le x,\ y \le 6$ 且 $x,\ y$ 爲整數。則 $xy > 10$ 的所有可能情況爲。

$$\begin{cases} x=2,\ y=6 \\ x=3,\ y=4,\ 5,\ 6 \\ x=4,\ y=3,\ 4,\ 5,\ 6 \\ x=5,\ y=3,\ 4,\ 5,\ 6 \\ x=6,\ y=2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6 \end{cases}$$

共 17 種，故機率爲 $\boxed{\dfrac{17}{36}}$。 □

14. 四個半徑爲 3 的圓形排列如圖所示，已經知道四個圓心分別爲正方形的四個頂點，則陰影部分的面積 = ___14___ ?

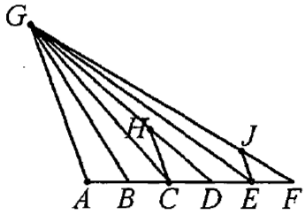


解答： 陰影部分面積等於正方形面積扣去四個 $\frac{1}{4}$ 圓的面積。故得到 $6\times6-4\times\left[\frac{1}{4}\times(3^2\times\pi)\right]=$ $\boxed{36-9\pi}$ □

15. 將一個裝滿水的容器倒出 $\frac{1}{2}$ 的水量，再倒出剩餘水量的 $\frac{1}{3}$，再倒出剩餘水量的 $\frac{1}{4}$，依據相同的步驟，則總共要倒出 = ___15___ 次水才會使得容器中剩餘水量恰好爲原來水量的 $\frac{1}{10}$。

解答： 第一次剩下原本的 $\frac{1}{2}$ 後，第二次剩下原本的 $\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}$。故 $\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}\times\frac{5}{6}\times\frac{6}{7}\times\frac{7}{8}\times\frac{8}{9}\times\frac{9}{10}=\frac{1}{10}$，所以共倒出了 $\boxed{9}$ 次。 □

16. 點 $B,\ C,\ D,\ E$ 將 $\overline{AF}$ 分割成 5 個長度均爲 1 之線段。點 G 不在直線 $\overleftrightarrow{AF}$ 上，點 H 在 $\overline{GD}$ 上，點 J 在 $\overline{GF}$ 上，$\overline{AG},\ \overline{CH},\ \overline{EJ}$ 三線段兩兩互相平行。請問：$\frac{HC}{JE}=$ ___16___ ?



解答： 因爲 $\overline{AG}\parallel\overline{CH}\parallel\overline{EJ}$，所以 $\triangle FGA\sim\triangle FJE$ 及 $\triangle DGA\sim\triangle DHC$，推得 $\frac{\overline{JE}}{\overline{AG}}=\frac{1}{5},\ \frac{\overline{CH}}{\overline{AG}}=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{\overline{CH}}{\overline{EJ}}=\frac{\frac{1}{3}\overline{AG}}{\frac{1}{5}\overline{AG}}=\frac{5}{3}$。 □

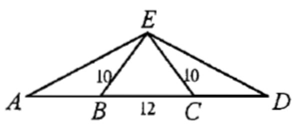
17. 一組瓷磚 1 號到 100 號，現在經過下列方式來做調整：移除所有編號爲完全平方數的瓷磚，然後再將剩餘的瓷磚重新編成從 1 開始的連續正整數號碼。請問：這樣的動作需要重複做 = ___⑰___ 次才能將瓷磚移除僅剩下一塊？

解答：

次數	移除瓷磚數	剩餘瓷磚數
1	10	90
2	9	81
3	9	72
4	8	64
5	8	56
6	7	49
7	7	42
8	6	36
9	6	30
10	5	25
11	5	20
12	4	16
13	4	12
14	3	9
15	3	6
16	2	4
17	2	2
18	1	1

□

18. 點 B, C 在 $\overline{AD}$ 上，點 E 不在 $\overline{AD}$ 上，且 $\overline{AB} = \overline{CD}$, $\overline{BC} = 12$, $\overline{BE} = \overline{CE} = 10$。已知 $\triangle AED$ 周長爲 $\triangle BEC$ 周長的兩倍，請問：$\overline{AB}$ 長度 = ___⑱___？



解答： 從點 E 對 $\overline{AD}$ 作垂線交 $\overline{AD}$ 於 H，利用畢氏定理得到 $10^2 = 6^2 + \overline{EH}^2 \Rightarrow \overline{EH} = 8$。依題意得到 $2\overline{AE} + 2\overline{AB} + 12 = 2(10 + 10 + 12) \Rightarrow \overline{AE} + \overline{AB} = 26$。假設 $\overline{AB} = x$，因此 $(26 - x)^2 = (x + 6)^2 + 8^2 \Rightarrow x = 9$。 □

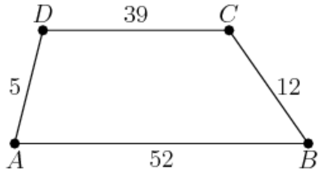
19. Tina 從集合 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 中隨機選 2 個不同的數；Sergio 從集合 $\{1, 2, \ldots, 10\}$ 中隨機選 1 個數。請問：Sergio 選的數大於 Tina 選的 2 個數之和的機率 = ___⑲___？

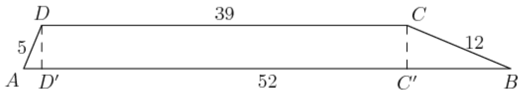
解答： Tina 所選的 2 個數之和最大值爲 $4 + 5 = 9$，最小值爲 $1 + 2 = 3$，因此分情形討論。

和爲 9：$\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{100}$；
和爲 8：$\frac{1}{10} \cdot \frac{2}{10} = \frac{2}{100}$；
和爲 7：$\frac{2}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{6}{100}$；
和爲 6：$\frac{2}{10} \cdot \frac{4}{10} = \frac{8}{100}$；
和爲 5：$\frac{2}{10} \cdot \frac{5}{10} = \frac{10}{100}$；

和爲 4：$\frac{1}{10}\cdot\frac{6}{10}=\frac{6}{100}$；
和爲 3：$\frac{1}{10}\cdot\frac{7}{10}=\frac{7}{100}$；
因此機率爲 $\frac{40}{100}=\frac{2}{5}$。 □

20. 如圖，梯形 $ABCD$ 中，$\overline{AB}\parallel\overline{CD}$，且 $\overline{AB}=52,\ \overline{BC}=12,\ \overline{CD}=39,\ \overline{DA}=5$。請問：梯形 $ABCD$ 的面積 = ___20___ ？





解答： 假設 $\overline{DD'}=x$，則 $\overline{CC'}=13-x$，利用畢氏定理得到 $5^2-x^2=12^2-(13-x)^2\Rightarrow x=\frac{25}{13}\Rightarrow\overline{CC'}=\frac{60}{13}$，因此梯形面積爲 $\frac{39+52}{2}\cdot\frac{60}{13}=210$。 □

～全卷完～