

承辦單位：國立中山大學應用數學系

答案：

1. 0 2. 2 3. 22 吋 4. $\frac{1}{16}$ 5. 600
6. 4227 7. 1:2 8. $\frac{5}{4} = 1.25$; $\frac{35}{4} = 8.75$ 9. $\sqrt{b^2 - 3}$ 10. 2:3
11. $12\sqrt{3} + 14\pi$ 12. 5 13. 22.5° 14. 2 15. $\sqrt{2}$
16. $200\sqrt{3}$ 17. $25\sqrt{5}$ 18. $b(ab + 2) = ab^2 + 2b$ 19. $\frac{2AC - B^2}{A^2}$ 20. 3

注意事項：

1. 本試卷共 20 題計算題，每一題 5 分。
2. 考試時間： 10:00~12:00。
3. 請將詳細步驟書寫於題目下方空白處，答案必須化簡並書寫於上方指定處。
4. 請將學校、姓名及報名編號寫在頁尾指定處。

1. 若 $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 = 3$ ，求 $a^3 + \frac{1}{a^3}$ 。

解答：因為

$$\begin{aligned}\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 &= 3 \\ a + \frac{1}{a} &= \pm\sqrt{3}\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}a^3 + \frac{1}{a^3} &= \left(a + \frac{1}{a}\right) \left(a^2 - 1 + \frac{1}{a^2}\right) \\ &= \left(a + \frac{1}{a}\right) \left(\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 3\right) \\ &= \pm\sqrt{3}(3 - 3) = 0\end{aligned} \quad \square$$

2. 若 $4x^3 - 8x^2 - 63x - 9 = 0$ 之所有根之和為何？

解答：由根與係數關係可知，三根之和為 $-\left(\frac{-8}{4}\right) = 2$ 。 □

3. 一直角三角形的斜邊長為 10 吋，其內切圓之半徑為 1 吋，則此三角形的周長為何？

學校：

姓名：

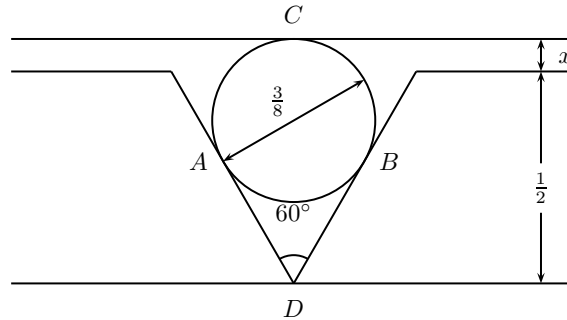
編號：

解答: 設兩股長為 x, y , 由切線長性質知

$$x + y = 10 + 2 \cdot 1 = 12$$

因此三角形之周長為 $10 + 12 = 22$ 。 □

4. 下圖中若 A, B, C 為切點, 求 x 值?



解答: 設 O 為圓心, 半徑為 r , 因為 $\angle D = 60^\circ$, 所以 $\overline{DO} = 2r$, 且因 $\triangle ABC$ 成等邊三角形, 由題意可知 $r = \frac{3}{16}$, 所以

$$\begin{aligned}\overline{DC} &= \overline{DO} + \overline{CO} = \overline{DO} + r = 2r + r = 3r \\ &= 3 \times \left(\frac{3}{16}\right) = \left(\frac{9}{16}\right)\end{aligned}$$

因為 $3r = x + \frac{1}{2}$, 所以 $x = 3r - \frac{1}{2} = \frac{9}{16} - \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$ 。 □

5. 一火車出發後一小時出事了, 停留半小時後以原速率之 $\frac{3}{4}$ 進行, 結果到達目的地遲 $3\frac{1}{2}$ 小時。若出事之地點向前移 90 哩時, 則火車將達目的地只遲 3 小時。整個行程長之哩數為何?

解答: 設全程為 x 哩, 原速率為 v , 以時間為等式, 則

$$\frac{x - v \cdot 1}{\frac{3}{4}v} + 1 + \frac{1}{2} - \frac{x}{v} = 3\frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\frac{x - v \cdot 1 - 90}{\frac{3}{4}v} + 1 + \frac{1}{2} - \frac{x}{v} + \frac{90}{v} = 3\frac{1}{2} \quad (2)$$

由 (1) 減去 (2) 可得

$$\frac{90}{\frac{3}{4}v} - \frac{90}{v} = \frac{1}{2}$$

因此 $3v = 180$, $v = 60$, 代入 (1) 可得 $x = 600$ 。 □

6. 欲描 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 之圖形，須作一表。對於 x 之值以等間隔之值增加時，函數之值依次為 3844, 3969, 4096, 4227, 4356, 4489, 4624 及 4761，其中有一不正確者為何？

解答：設 x 之值以 h 之等間隔而增加，則函數之值依次為

$$f(x), f(x+h), f(x+2h), \dots, f(x+7h)$$

且

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= a(x+h)^2 + b(x+h) + c - (ax^2 + bx + c) \\ &= 2ahx + ah^2 + bh \end{aligned}$$

由於函數之值的差為 x 之一次式，可見值之增加與 x 值成比例，即若 x 依次增加 h 時，函數值之差亦依次以同量 ($2ah^2$) 增加，但其所列之值

$$3844, 3969, 4096, 4227, 4356, 4489, 4624, 4761$$

的差別為

$$125, 127, 131, 129, 133, 135, 137$$

可見 4227 是錯的，因 4227 的存在，致使無法以同量增加，應為 4225。 □

7. 若一等差級數之前十項之和為其前五項之和的四倍時，則首項與公差之比值為何？

解答：設首項為 a ，公差為 d ，則

$$S_{10} = \frac{10}{2} [2a + (10-1)d] = 10a + 45d \quad (3)$$

$$S_5 = \frac{5}{2} [2a + (5-1)d] = 5a + 10d \quad (4)$$

已知

$$S_{10} = 4S_5 \quad (5)$$

將 (5) 代入 (3) 和 (4)，化簡可得

$$10a + 45d = 4(5a + 10d)$$

$$5d = 10a$$

$$\text{故 } \frac{a}{d} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}。 \quad \square$$

8. 在半徑為 5 單位之圓中， \overline{CD} 與 \overline{AB} 為互相垂直的直徑，一弦 \overline{CH} 交 \overline{AB} 於 K ，且長為 8 單位，而直徑 \overline{AB} 被分成二線段，則兩線段長度分別為何？

解答：設圓心 O ，且設 $\overline{AK} = x$ ，則 $\overline{KB} = 10 - x$ ， $\overline{OK} = 5 - x$ ，因此

$$\overline{CK} = \sqrt{(\overline{CO})^2 + (\overline{OK})^2}$$

$$= \sqrt{5^2 + (5-x)^2}$$

可知 $\overline{HK} = 8 - \overline{CK} = 8 - \sqrt{5^2 + (5-x)^2}$ 。

因為 $\triangle AKH \sim \triangle CKB$ ，所以 $\overline{CK} \cdot \overline{HK} = \overline{AK} \cdot \overline{BK}$ ，即

$$\sqrt{5^2 + (5-x)^2} \cdot \left[8 - \sqrt{5^2 + (5-x)^2}\right] = x \cdot (10-x)$$

化簡可得

$$8\sqrt{5^2 + (5-x)^2} - [5^2 + (5-x)^2] = 10x - x^2$$

$$8\sqrt{50 - 10x + x^2} = 50$$

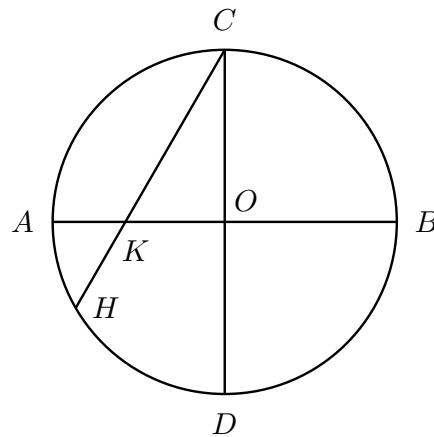
$$64(50 - 10x + x^2) = 2500$$

$$16x^2 - 160x + 175 = 0$$

$$(4x - 5)(4x - 35) = 0$$

$$x = \frac{5}{4}, \frac{35}{4}$$

□



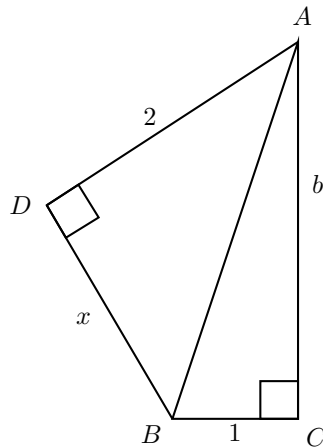
9. 在直角三角形 ABC 之斜邊 \overline{AB} 上另做一直角三角形 ABD ，並以 \overline{AB} 為斜邊。若 $\overline{BC} = 1$ ， $\overline{AC} = b$ ，且 $\overline{AD} = 2$ ，則 \overline{BD} 為何？

解答：設 $\overline{BD} = x$ ，則

$$x^2 + 2^2 = (\overline{AB})^2 = 1^2 + b^2$$

因此 $x^2 = b^2 - 3$ ，故 $x = \sqrt{b^2 - 3}$ 。

□

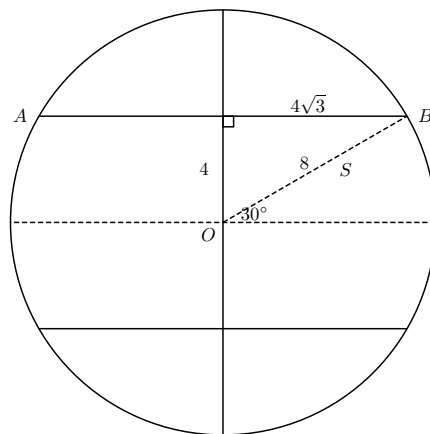


10. 一正三角形之高等於一圓之半徑，另一正三角形內接於此圓，則此兩三角形周長之比為何？

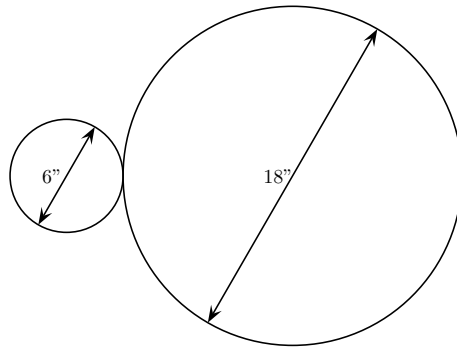
解答: 【解法一】 設圓半徑為 r ，由題意可知，第一個正三角形的邊長為 $\frac{2}{\sqrt{3}}r$ ，周長為 $\frac{6}{\sqrt{3}}r$ 。

第二個正三角形的重心相當於圓心，所以可知此正三角形的高為 $\frac{3r}{2}$ ，因此邊長為 $\sqrt{3}r$ ，周長為 $3\sqrt{3}r$ ，故兩正三角形的周長比為 $\frac{6}{\sqrt{3}}r : 3\sqrt{3}r = 2 : 3$ 。

【解法二】 如下圖所示，兩正三角形邊長之比等於高之比，即 $1 : \frac{3}{2} = 2 : 3$ 。(因 O 為內接於圓之正三角形的重心) □



11. 有直徑為 6 吋及 18 吋之兩柱，如圖所示放置且由金屬線綁在一起，則圍繞著它們的最短金屬線長為何？

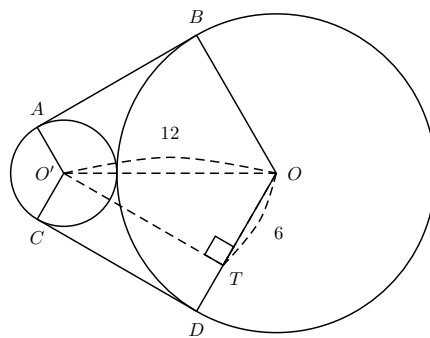


解答: 外公切線長為 $\sqrt{(9+3)^2 - (9-3)^2} = 6\sqrt{3}$, 因為直角三角形 $OO'T$, $\overline{OT} = \frac{1}{2}\overline{OO'}$, 所以 $\angle O'TO = 30^\circ$, $\angle AO'C = \angle BOD = 120^\circ$, 因此

$$\widehat{AC} = \frac{120^\circ}{360^\circ}(2\pi \cdot 3) = 2\pi$$

$$\widehat{BD} = \frac{240^\circ}{360^\circ}(2\pi \cdot 9) = 12\pi$$

可見最短之線由兩外公切線及 \widehat{AC} 及 \widehat{BD} 組成, 故為 $2 \times 6\sqrt{3} + 2\pi + 12\pi = 12\sqrt{3} + 14\pi$ 。 □



12. 若 $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1} + 1 = 0$, 則 $4x$ 為何?

解答: 化簡得

$$\sqrt{x-1} + 1 = -\sqrt{x+1}$$

$$x - 1 + 1 + 2\sqrt{x-1} = x + 1 \quad (\text{等號兩邊同時平方})$$

$$2\sqrt{x-1} = 1 \quad (\text{移項整理})$$

$$4(x-1) = 1$$

$$4x = 5 \quad \square$$

13. 時鐘在 2:15 的時針和分針兩針夾角為何?

解答: 因為 15 分為 $\frac{1}{4}$ 小時, 所以時針會往前移動 $\frac{1}{4} \times 30^\circ$, 故在 2:15 的兩針夾角為

$$30^\circ - \frac{1}{4} \times 30^\circ = 22.5^\circ \quad \square$$

14. 數 x, y, z 成 2, 3, 5 之比，三數之和為 100，且 $y = ax - 10$ ，則 a 值為何？

解答：利用合分比可知

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5} = \frac{x+y+z}{2+3+5} = \frac{100}{10} = 10$$

可知 $x = 20, y = 30$ ，且

$$\begin{aligned} y &= ax - 10 \\ 30 &= 20a - 10 \\ a &= 2 \end{aligned}$$

□

15. 兩圖形 $x^2 + y = 10$ 與 $x + y = 10$ 交兩點，此兩點的距離為何？

解答：解聯立方程式，可得

$$\begin{aligned} x^2 + 10 - x &= 10 \\ x^2 - x &= 0 \\ (x - 1)x &= 0 \\ x &= 0, 1 \end{aligned}$$

因此兩交點為 $(0, 10), (1, 9)$ ，故兩點的距離為 $\sqrt{(1-0)^2 + (10-9)^2} = \sqrt{2}$ 。 □

16. 內切於正六邊形的圓面積為 100π ，則此六邊形之面積為何？

解答：設此內切圓半徑為 r ，則 $100\pi = \pi r^2$ ，可知 $r = 10$ ，且 r 相當於此正六邊形的邊心距，所以正六邊形的一邊長為 $\frac{2}{\sqrt{3}}10 = \frac{20\sqrt{3}}{3}$ ，故面積為 $6 \times \frac{1}{2} \times \frac{20\sqrt{3}}{3} \times 10 = 200\sqrt{3}$ 。 □

17. 若 $4^x - 4^{x-1} = 24$ ，則 $(2x)^x$ 值為何？

解答：因為

$$\begin{aligned} 4^x - 4^{x-1} &= 24 \\ 4^{x-1}[4 - 1] &= 24 \\ 4^{x-1} &= 8 = 2^3 \\ 2^{2(x-1)} &= 2^3 \\ 2(x-1) &= 3 \\ x &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

因此 $(2x)^x = \left(2 \cdot \frac{5}{2}\right)^{\frac{5}{2}} = 25\sqrt{5}$ 。 □

18. 若 $xy = b$ 且 $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = a$ ，則 $(x + y)^2$ 之值為何？

解答：

$$\begin{aligned}(x + y)^2 &= x^2 + y^2 + 2xy \\ &= x^2 y^2 \left[\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{2}{xy} \right] \\ &= b^2 \times \left[a + \frac{2}{b} \right] \\ &= ab^2 + 2b\end{aligned}\quad \square$$

19. 設 $Ax^2 + Bx + C = 0$ 之根為 r 與 s ，而 $x^2 + px + q = 0$ 之根為 r^2 與 s^2 ，則 p 值為何（用 A, B, C 表示）？

解答：利用根與係數關係可知

$$\begin{aligned}r^2 + s^2 &= -p \\ r + s &= -\frac{B}{A} \\ rs &= \frac{C}{A}\end{aligned}$$

利用平方和關係可知 $p = -(r^2 + s^2) = -(r + s)^2 + 2rs$ ，故 $p = -\frac{B^2}{A^2} + \frac{2C}{A} = \frac{2CA - B^2}{A^2}$ 。

□

20. 將 695 寫成一階乘式，即 $695 = a_1 + a_2 \cdot 2! + a_3 \cdot 3! + \cdots + a_n \cdot n!$ ，其中 a_1, a_2, \dots, a_n 是整數並且 $0 \leq a_k \leq k$ ，而 $n! = n(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1$ ，求 a_4 。

解答：

$$695 = a_1 + a_2(2 \cdot 1) + a_3(3 \cdot 2 \cdot 1) + a_4(4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) + a_5(5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)$$

即

$$695 = a_1 + 2a_2 + 6a_3 + 24a_4 + 120a_5$$

其中 $0 \leq a_k \leq k$ ，因此 a_k 必等於 5（為得 695），而 $a_4 \neq 4$ ，因為

$$5 \cdot 120 + 4 \cdot 24 > 695$$

同樣 a_4 ，不可小於 3，因為若 $a_4 = 2$ ，則

$$2 \cdot 24 + 3 \cdot 6 + 2 \cdot 2 + 1 < 95$$

所以 $a_4 = 3$ 。

驗算：

$$5 \cdot 120 + 3 \cdot 24 + 3 \cdot 6 + 2 \cdot 2 + 1 = 695 \quad \square$$

～全卷完～