組合學雜談

Speaker: Yeong-Nan Yeh
葉 永 南
Institute of mathemetics,
Academia sinica

At中山大學應數系資優班

鴿籠原理

- 鴿籠原理，又名
- 鴿巢原理
  (The Pigeonhole Principle)
- 狄利克雷抽屜原理
  (The Dirichlet Drawer Principle)
- 重選原則。

原理. 假定有 n + 1 隻鴿子和 n 個鳥籠, 如果要讓所有鴿子飛入籠中, 則存在某一個籠子裡面至少有兩隻鴿子。

- 這個看起來很簡單的原理俗稱鴿籠原理,也稱抽屜原理, 是十九世紀德國數學家Dirichlet提出來, 以解決數論上的一些問題, 所以也有人將它稱為 Dirichlet (抽屜) 原理。這個貌不驚人的原理, 卻有廣泛而出人意表的許多應用, 有很多很深的定理都可以用它來證明。

10隻鴿子放進9個鴿籠，那麼一定有一個鴿籠放進了至少兩隻鴿子。

原理.

- 如果有**n+1**隻鴿子要飛進 **n**個籠子內休息，那麼必定有一個籠子內停了兩之或兩隻以上的鴿子。
- 將 ***k*** 個東西分成 ***n*** 類，若 $k \geq nr - n + 1$

則有一類東西之數目大於或等於 ***r***。

生活中常碰到的實例

- 十隻鴿子分放在九個籠中，必有一籠至少放二隻鴿子。
- 五房客四房間，一定有二房客共一房間。
- **人的頭髮最多只有10萬根。台北市人口一定有兩個人頭上的頭髮一樣多根**
- 任意挑八天，一定有兩天同樣是星期幾。
- 367 個人同行， 必有二人同日生。
- 十三人同行，必有二人同月生。
- 五人分十六本書，必然有人至少獨得四本書。
- …

運用鴿籠原理有兩個主要環節

- <u>認識到運用鴿籠原理的必要</u>
- <u>製造鴿籠</u>。

處理好這兩個環節重要的還在於對問題深刻認識，以及經驗和機敏。

例1：圍棋高手

- 甲棋士一連比賽了**11**星期，它的戰績輝煌，優勝記錄是：每日至少勝一次；每星期最多勝**12**次。由此記錄可推得在一段連續的日子裏，甲棋士不多不少勝了**21**次。

- 設 *s*1, *s*2,…,*s*77 等為第 1 天，第 2 天，……最後第77天沈高手勝棋的累積數。由於每天至少勝一次及每星期最多勝12次，
- 得 $1 \le s_1 < s_2 < \cdots < s_{77} \le 12 \times 11 = 132$ …(1)
- 令 $t_i = s_i + 21$ $i = 1,2,3 \ldots 77$ …(2)
- 則 $22 \le t_1 < t_2 \cdots < t_{77} \le 132 + 21 = 153$ …(3)
- *s*1, *s*2,…,*s*77 及 *t*1, *t*2,…,*t*77 共有154個數，但其值落在 1 至153之153個數中。由鴿籠原理，其中必有二個數其值相同。
- 由(1)及(3)，*si* 之間彼此不相等，*tj* 之間亦彼此不相等。因此某一 *sk* 等於某一 *tm*。此即 *sk* = *tm* = *sm* +21 或 *sk* - *sm* = 21。換言之，從第m+1 天至第k 天，甲棋士不多不少勝了21次。

廣義的鴿籠原理

- 給定非負的整數q_1，q_2，……，q_n，將 ***k*** **(>** $q_1 + q_2 +$……$+q_n$**)**個東西分為 ***n*** 類，若 則一定有某第 ***i*** 類東西個數大於或等於 q_i 個。

- 假若結論不確，即是說第 1 類東西小於 q_1 ，第 2 類小於 q_2 ，……第 n 類小於 q_n 。則所有東西總和
此與前提矛盾故不可能。

- 當$q_1 = q_2 = \ldots\ldots = q_n$=1 時，即為原來的鴿籠原理。

- 鴿籠原理有一種更廣義的形式，那就是組合學上有廣泛應用的

蘭姆西 (Ramsey) 定理，

三個知友或三個陌生人

- 一群人，人數大於等於 6，必然有三知友兩兩彼此認識或有三新鮮人兩兩彼此都不認識。以下就是證明。

在平面上有六點，用線段兩兩連接。用兩種顏色分別塗上這**15**條邊，試證：至少有兩個同色三角形。

解：計算方法：設同色三角形的數目為x。

1. 三角形的總數$={}_6C_3=20$個 ，則異色三角形為20-x。
2. 已知異色三角形恰好有二個異色角、一個同色角；而同色三角形有三個同色角。(但這樣的計算也不能得出新的方程)。
3. (突破點)考慮每個點，同色角有一個至少值。${}_5C_r+{}_rC_{5-r}\geqq 4$。
4. $20+2x\geqq 4 \times 6 = 24$ 。

十人中之高矮次序

- 十個人任意排成一列必定有四人是按高矮順序排列。

- 假設 $a_1, a_2,\ldots, a_{10}$ 中沒有長度為 *4* 的遞增子敘列。對任意 a_i 考慮所有以 a_i為起點之遞增子敘列。令 m_i 為此種遞增子敘列中可能達到之最大長度。
- 由假定得
- $m_1, m_2,\ldots, m_{10}$的值落在 1,2,3 之 *3* 個數中，由鴿籠原理，必有 *4* 個 *mi* 取同值。令
- (*) $$1 \leq m_i \leq n, \qquad i = 1, 2, \cdots, n^2+1$$

$$m_{i_1} = m_{i_2} = \cdots = m_{i_{n+1}} \quad 且 \quad i_1 < i_2 < \cdots < i_{n+1}$$

題目6

求證：存在一個具有下述性質的正整數的集合A：對於任何由無限個質數組成的集合S，存在$k \geq 2$及正整數$m \in A$和$n \notin A$，使得m和n均為S中k個不同元素的乘積。

Problem 6 (proposed by Finland)
Show that there exists a set A of positive integers with the following property:

For any infinite set S of primes there exist two positive integers m in A and n not in A each of which is a product of k distinct elements of S for some $2 \leq k$.

解答

假設p_1、p_2、⋯是質數從小到大的排列。

定義A_{p_i}是以p_i為最小質因數的p_i個相異質數的乘積所組成的集合。令 $A=\bigcup_{i=1}^{\infty} A_{p_i}$。

對於任何由無限個質數組成的集合$S=\{q_1,q_2,q_3,\cdots\}$，其中$q_1<q_2<q_3<\cdots$，

考慮$q_1q_2\cdots q_j$，其中$j=p_{t_1}$：令 $\underbrace{\boxed{q_1q_2\cdots q_j}}_{k=p_{t_1}\text{個}}^{m}=\boxed{p_{t_1}}p_{t_2}\cdots p_{t_j}\in A_{p_i}\subset A$

令$r=p_{t_1}+2$，則 $\underbrace{\boxed{q_3q_4\cdots q_r}}_{k=p_{t_1}\text{個}}^{n}=\boxed{p_{t_3}}p_{t_4}\cdots p_{t_r}\notin A$

求證：存在一個具有下述性質的正整數的集合A：對於任何由無限個質數組成的集合S，存在$k\geq 2$及正整數$m\in A$和$n\notin A$，使得m和n均為S中k個不同元素的乘積。

解答

Example:對於任何由無限個質數組成的集合$S = \{q_1, q_2, q_3, \cdots\}$，其中$q_1 < q_2 < q_3 < \cdots$

如果 $q_1 = 2 \in S$，則 $2q_a \in S_A$，其中質數 $q_a > 2$；

$q_a q_b \notin A$，其中質數 $q_a > q_b > 3$ 。

如果 $q_1 = 5 \in S$，則 $5q_a, q_b, q_c, q_d \in A$，

其中質數 $q_a > q_b > q_c > q_d > 5$；

則 $q_a q_b q_c q_d q_e \notin A$，

其中質數 $q_a > q_b > q_c > q_d > q_e > 5$ 。

求證：存在一個具有下述性質的正整數的集合A：對於任何由無限個質數組成的集合S，存在k≧2及正整數m∈A和n∉A，使得m和n均為S中k個不同元素的乘積。

1995.6. 設**p**是一個奇質數，考慮集合**{1，2，.....，2p}**的滿足以下兩條件的子集合**A**：

(i) 集合**A**恰有**p**個元素；

(ii) 集合**A**中所有元素之和可被**p**整除。

試求所有這樣的子集合**A**的個數。

3. Let p be an odd prime. Find the number of subsets A of $\{1, 2, \ldots, 2p\}$ such that

(a) A has exactly p elements, and

(b) the sum of all the elements in A is divisible by p.

Solution

For any p-element subset A of $\{1, 2, ..., 2p\}$, denote by $s(A)$ the sum of the elements of A. Of the $\binom{2p}{p}$ such subsets, $B = \{1, 2, ..., p\}$ and $C = \{p+1, p+2, ..., 2p\}$ satisfy $s(B) = s(C) \equiv 0 \pmod p$. For $A \neq B, C$, we have $A \bigcap B \neq \emptyset \neq A \bigcap C$. Partition the $\binom{2p}{p} - 2$ p-element subsets other than B and C into groups of size p as follows. Two subsets A and A' are in the same group if and only if $A' \bigcap C = A \bigcap C$ and $A' \bigcap B$ is a cyclic permutation of $A \bigcap B$ within B. Suppose $A \bigcap B$ has n elements, $0 < n < p$. For some m such that $0 < m < p$,

$$A' \bigcap B = \{x + m : x \in A \bigcap B, x + m \leq p\}$$

$$\bigcup \{x + m - p : x \in A \bigcap B, x \leq p < x + m\}.$$

Hence $s(A') - s(A) \equiv mn \pmod p$, but mn is not divisible by p. It follows that exactly one subset A in each group satisfies $s(A) \equiv 0 \pmod p$, and the total number of such subsets is $p^{-1}\left(\binom{2p}{p} - 2\right) + 2$.

Alternative Solution

Let ω be a primitive p-th root of unity. Then

$$\prod_{i=1}^{2p}(x-\omega^i)=(x^p-1)^2=x^{2p}-2x^p+1.$$

Comparing the coefficients of the term x^p, we have

$$2=\sum \omega^{i_1+i_2+\cdots+i_p}=\sum_{j=0}^{p-1} n_j\omega^j,$$

where the first summation ranges over all subsets $\{i_1,i_2,\ldots,i_p\}$ of $\{1,2,\ldots,2p\}$ and n_j in the second summation is the number of such subsets such that $i_1+i_2+\cdots+i_n\equiv j \pmod p$. It follows that ω is a root of $G(x)=(n_0-2)+\sum_{j=1}^{p-1}n_j\omega^j$, which is a polynomial of degree $p-1$. Since the minimal polynomial for ω over the field of rational numbers is $F(x)=\sum_{j=0}^{p-1}\omega^j$, which is also of degree $p-1$, $G(x)$ must be a scalar multiple of $F(x)$, so that $n_0-2=n_1=n_2=\cdots=n_{p-1}$. Since $\sum_{j=0}^{p}n_j=\binom{2p}{p}$, we have $n_0=p^{-1}\left(\binom{2p}{p}-2\right)+2$.

Remark: The first solution is due to the proposer, Marcin Kuczma, the leader of the team from Poland. The second solution is due to Roberto Dvornicich, the leader of the team from Italy. Nikolay Nikolov, a Bulgarian student, won a special prize for his solution which is essentially along the line of the second one. Nikolay had won two Gold Medals and one Silver Medal at the last three IMO's, and topped off his outstanding career as a competitor by obtaining a perfect score this time.

「條形」是由 3 個邊長為 1 的正方形所組成的圖形（如圖所示）

或將此圖形經由旋轉及翻轉所得之任意圖形。用 21 個「條形」來鋪蓋在 8x8 的大方格，任何兩個「條形」彼此不重疊，大方格中剩下一個沒被鋪蓋的方格，被稱為「幸運格」。請找出大方格中所有可能的「幸運格」。

1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3
3	1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3
3	1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3

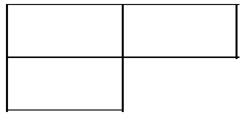
1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3
3	1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3
3	1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3

2	1	3	2	1	3	2	1
3	2	1	3	2	1	3	2
1	3	2	1	3	2	1	3
2	1	3	2	1	3	2	1
3	2	1	3	2	1	3	2
1	3	2	1	3	2	1	3
2	1	3	2	1	3	2	1
3	2	1	3	2	1	3	2

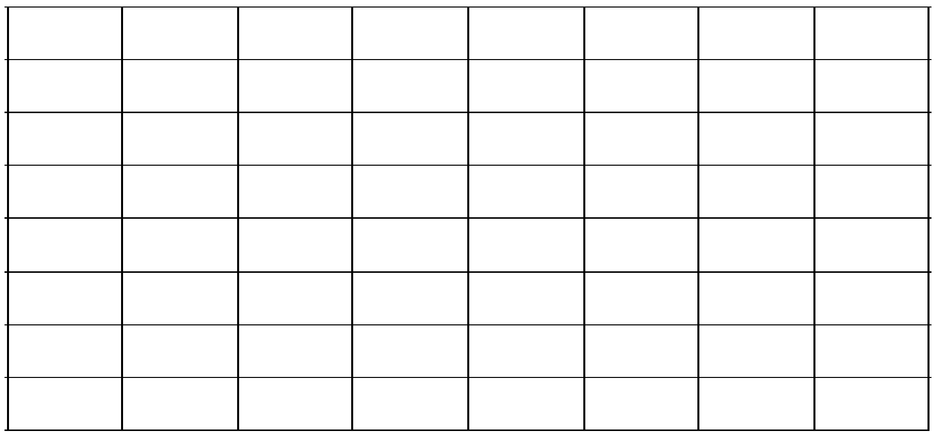
3	2	1	3	2	1	3	2
2	1	3	2	1	3	2	1
1	3	2	1	3	2	1	3
3	2	1	3	2	1	3	2
2	1	3	2	1	3	2	1
1	3	2	1	3	2	1	3
3	2	1	3	2	1	3	2
2	1	3	2	1	3	2	1

2	3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1	2
3	1	2	3	1	2	3	1
2	3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1	2
3	1	2	3	1	2	3	1
2	3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1	2

「虧格」是由3個邊長為1的正方形所組成的圖形（如圖所示）

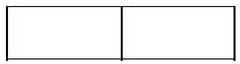


或將此圖形經由旋轉及翻轉所得之任意圖形。請問至少要用多少個放在8x8的大方格中，使得再放入一個「虧格」到這8x8的大方格中，一定會和原先某個放入的「虧格」重疊，

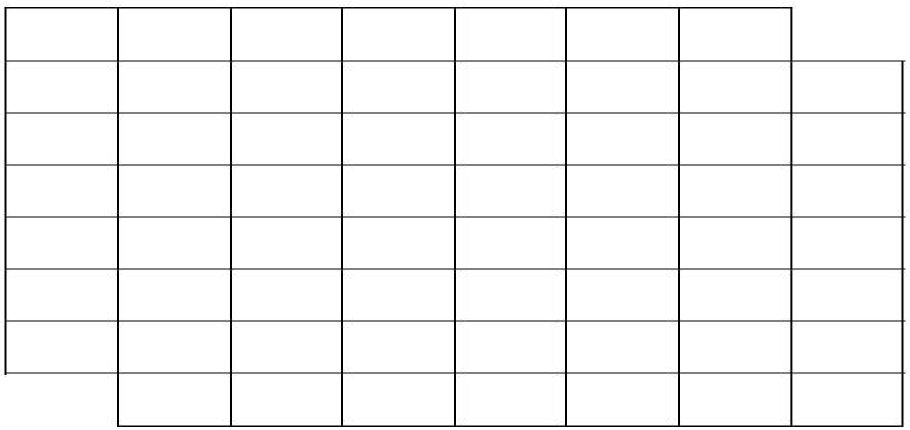


1	1	2	2	3	3	4	4
	1		2		3		4
	9		A	A		B	
	9	9		A	B	B	
	5		6		7		8
5	5	6	6	7	7	8	8

「骨牌」是由 2 個邊長為 1 的正方形所組成的圖形（如圖所示）



或將此圖形經由旋轉及翻轉所得之任意圖形。用 31 個「骨牌」來鋪蓋在 8x8 的大方格少兩個角的圖形，（如下圖所示），請問可以完全覆蓋滿嗎?



承上題，如果圖形改為 8x8 的大方格少兩個小方格的圖形，請問用 31 個「骨牌」來鋪蓋這個圖形，可以完全覆蓋滿嗎?