一般性Catalan數的組合意義及其應用

指導老師：薛昭雄 教授
學生：林晉宏

台灣大學數學研究所

2009 數學年會

摘要

- Catalan及一般性Catalan
- 用Counting看Catalan
- 用遞迴關係看Catalan
- $c_{n,k}$的組合意義
- Jonah's Theorem

Catalan數[9]

- $a_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$
- $a_n = \frac{1}{2n+1}\binom{2n+1}{n} = \frac{1}{n}\binom{2n}{n+1} = \frac{1}{n}\binom{2n}{n-1}$
- $a_{n+1} = a_0 a_n + a_1 a_{n-1} + \cdots + a_n a_0, a_0 = 1$
- $\{a_n\} = \{1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, \ldots\}$

一般性Catalan數[1, 5, 6, 7, 9]

- $c_{n,k} = \frac{1}{(k-1)n+1}\binom{kn}{n}$
- $c_{n,k} = \frac{1}{kn+1}\binom{kn+1}{n} = \frac{1}{n}\binom{kn}{(k-1)n+1} = \frac{1}{n}\binom{kn}{n-1}$
- 符合(1)式，且$c_{0,k} = 1$

$$c_{n+1,k} = \sum_{r_1+r_2+\cdots+r_k=n} c_{r_1,k} \times c_{r_2,k} \times \cdots \times c_{r_k,k}. \tag{1}$$

- $\{c_{n,0}\} = \{1, 1, 0, 0, \ldots\};$
  $\{c_{n,1}\} = \{1, 1, 1, 1, \ldots\};$
  $\{c_{n,2}\} = \{1, 1, 2, 5, 14, 42, \ldots\};$
  $\{c_{n,3}\} = \{1, 1, 3, 12, 55, 273, \ldots\};$

引理1

令$S=\{\vec{x}=(x_1,x_2,\dots,x_q)\mid 0\le x_1\le x_2\le\cdots\le x_q\le p-1, x_i\in\mathbb{Z}\}$，定義一種運算(Cofman [2])

$$\oplus : S\times\{0,1,\dots,p-1\}\to S,$$

$$(x_1,x_2,\dots,x_q)\oplus\ell=\text{rearrangement of }(y_1,y_2,\dots,y_q)$$

$$,y_i\equiv(x_i+\ell)\mod p,$$

$$(x_1,x_2,\dots,x_q)\in S,\ell\in\{0,1,\dots,p-1\}$$

其中rearrangement of$(y_1,y_2,\dots,y_q)$表示將其重新由小到大排列。並定義$S\sim S$為一關係，$\vec{x}\sim\vec{y}$ 表示存在一個ℓ使得$\vec{y}=\vec{x}\oplus\ell$，則$\sim$為一等價關係。特別地，當$(p,q)=1$，則$\sim$的每個分割有$p$個元素、且$|S/\sim|=\frac{1}{p}\binom{p+q-1}{q}$。

例：

	$p=5, q=3$	$p=3, q=4$	$p=6, q=4$	$p=6, q=4$
	$(1,1,2)$	$(0,1,2,2)$	$(0,0,3,3)$	$(0,1,1,1)$
$\oplus 1$	$(2,2,3)$	$(0,0,1,2)$	$(1,1,4,4)$	$(1,2,2,2)$
$\oplus 2$	$(3,3,4)$	$(0,1,1,2)$	$(2,2,5,5)$	$(2,3,3,3)$
$\oplus 3$	$(0,4,4)$	$(0,1,2,2)$	$(0,0,3,3)$	$(3,4,4,4)$
$\oplus 4$	$(0,0,1)$			$(4,5,5,5)$
$\oplus 5$	$(1,1,2)$			$(0,0,0,5)$
$\oplus 6$				$(0,1,1,1)$

引理1 證明：

欲證$\sim$為一等價關係，須證其有反身性、對稱性、遞移性
若$(p,q)=1$，任取$\vec{x}\in S$，因為包含$\vec{x}$的分割
由$\vec{x},\vec{x}\oplus 1,\ldots,\vec{x}\oplus(p-1)$組成，欲證明其有$p$個，只須證明

$$\vec{x}\neq\vec{x}\oplus\ell_0,\ \ \text{if}\ \ 0<\ell_0<p$$

假設$0<\ell_0<p$在滿足$\vec{x}=\vec{x}\oplus\ell_0$，則$d=\gcd(\ell_0,p)$也符合$\vec{x}=\vec{x}\oplus d$。
令$c=p/d$、r_i表示$\vec{x}$中i個數，$i=0,1,\ldots,p-1$。因為

$$\vec{x}=\vec{x}\oplus d=\vec{x}\oplus 2d=\cdots=\vec{x}\oplus(c-1)d,$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{ccccccc} r_0 & = & r_d & = & \cdots & = & r_{(c-1)d}\\ r_1 & = & r_{1+d} & = & \cdots & = & r_{1+(c-1)d}\\ \vdots & & \vdots & & & \ddots & \vdots\\ r_{d-1} & = & r_{2d-1} & = & \cdots & = & r_{p-1}\end{array}\right.$$

則$q=r_0+r_1+\cdots+r_{p-1}=c(r_0+r_1+\cdots+r_{d-1})$所以$c|q$，
又$c=p/d\Rightarrow c|p$，由於$(p,q)=1$，因此$c=1\Rightarrow d=p$
亦即$\ell_0=0,p,2p,\ldots$，得證$\vec{x}\neq\vec{x}\oplus\ell_0,\ \ \text{if}\ \ 0<\ell_0<p$

引理1 證明(by group action)：

$Z_p \times S \to S$
對任意$\vec{x} \in S$，令$|G_{\vec{x}}| = c$，我們有$|Z_p| = c|O_{\vec{x}}| \Rightarrow c|p$
令$G_{\vec{x}} =< d >, cd = p$
$\vec{x} = d\vec{x} = 2d\vec{x} = \cdots = (c-1)d\vec{x}$
$\Rightarrow c|q \Rightarrow c = 1 \Rightarrow |O_{\vec{x}}| = p$, for all $\vec{x}$

$$|S| = \sum_{\vec{x} \in I} |O_{\vec{x}}| = |O_{\vec{x}}||I| = \binom{p+q-1}{q}$$

所以

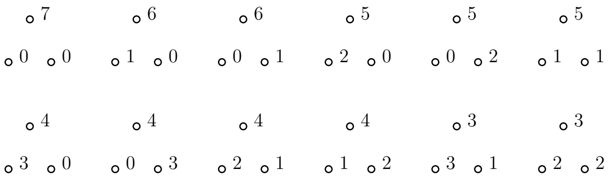
$$|S/\sim| = |I| = \frac{1}{p}\binom{p+q-1}{q}$$

如何使用？

- 如果令$p = n, q = n+1$，
  $\Rightarrow |S/\sim| = \frac{1}{n}\binom{2n}{n+1} = a_n$
- 如果令$p = n, q = (k-1)n+1$，
  $\Rightarrow |S/\sim| = \frac{1}{n}\binom{kn}{(k-1)n+1} = c_{n,k}$
- 如果令$p = (k-1)n+1, q = n$，
  $\Rightarrow |S/\sim| = \frac{1}{(k-1)n+1}\binom{kn}{n} = c_{n,k}$

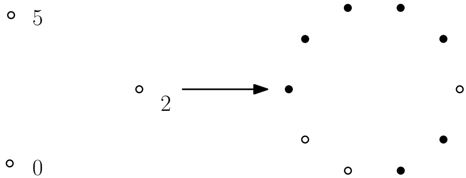
組合解釋1

在環狀的n個洞裡放入$(k-1)n+1$個球，旋轉後可以重合視為同一種，則有$c_{n,k}$種放法。
例：$c_{3,3}=12$



組合解釋1-1

在環狀的$kn+1$個洞裡放入$(k-1)n+1$個球，每格子只能放一球，旋轉後可以重合視為同一種，則有$c_{n,k}$種放法。



放法數$= \frac{1}{kn+1}\binom{kn+1}{(k-1)n+1} = \frac{1}{kn+1}\binom{kn+1}{n} = c_{n,k}$種放法。

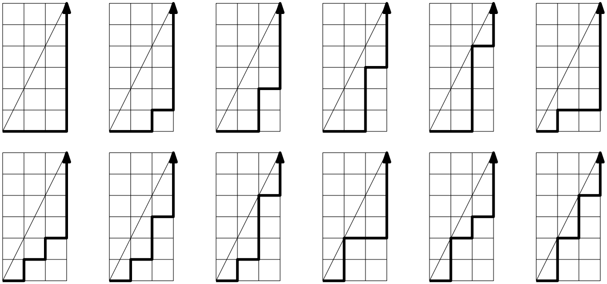
同餘方程式

$$x_1+x_2+\cdots+x_{(k-1)n+1} \equiv 0 \pmod{n}, \quad 0 \le x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_{(k-1)n+1} \le n$$

其中$x_i = 0, 1, \ldots, n-1$, for all i，有$c_{n,k}$組解(Shiue [8])。
例：$c_{3,3} = 12$
$(0,0,0,0,0,0,0), (0,0,0,0,0,1,2), (0,0,0,0,1,1,1),$
$(0,0,0,0,2,2,2), (0,0,0,1,1,2,2), (0,0,1,1,1,1,2),$
$(0,0,1,2,2,2,2), (0,1,1,1,1,1,1), (0,1,1,1,2,2,2),$
$(0,2,2,2,2,2,2), (1,1,1,1,1,2,2), (1,1,2,2,2,2,2).$

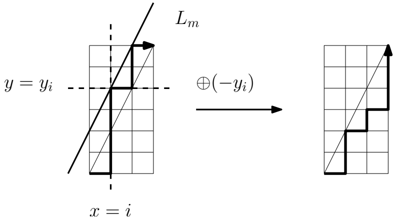
組合解釋3

從$(0,0)$到$(n,(k-1)n)$不超過$L: y=(k-1)x$的路徑有$c_{n,k}$種走法(Cofman[2])。
例：$c_{3,3}=12$



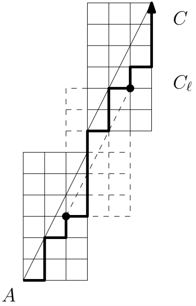
存在性

對任意$\vec{x}$，則取m為$\vec{x}$對應路徑不超過$L_m : y = (k-1)x + m$的最小的整數，取路徑與L_m交點x-座標最小者之座標為(i, y_i)，則鉛垂線$x = i$的左邊都和L_m沒有交點；又鉛垂線的右邊都沒超過L_m。因此取$x_0 = x \oplus (-y_i)$，其對應的路徑不會超過L。



惟一性

令棋盤的左下角叫A點、右上角叫C點，對任意路徑$\vec{x}$，在原棋盤A點往下一格接上另一個棋盤的C，畫上同樣的路徑，對$0 < \ell \leq kn$，取C_ℓ為路徑和$y = \ell$交點中最右邊的一點，則以C_ℓ當棋盤C點所框出來的路徑即$\vec{x} \oplus \ell$，可發覺C_ℓ都不可能在L上，所以任何$\vec{x} \oplus \ell$在$(0,0)$這點都會超過該棋盤的對角線。



遞迴關係

- $a_{n+1} = a_0 a_n + a_1 a_{n-1} + \cdots + a_n a_0,\, a_0 = 1$
- $\{a_n\} = \{1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, \ldots\}$
- 符合(1)式，且$c_{0,k} = 1$

$$c_{n+1,k} = \sum_{r_1+r_2+\cdots+r_k=n} c_{r_1,k} \times c_{r_2,k} \times \cdots \times c_{r_k,k}. \qquad (2)$$

- $\{c_{n,0}\} = \{1, 1, 0, 0, \ldots\};$
  $\{c_{n,1}\} = \{1, 1, 1, 1, \ldots\};$
  $\{c_{n,2}\} = \{1, 1, 2, 5, 14, 42, \ldots\};$
  $\{c_{n,3}\} = \{1, 1, 3, 12, 55, 273, \ldots\};$

- 令$C_2(x)$為Catalan數用遞迴關係做的生成函數 $C_2(x)$滿足$xA_2^2 = A_2 - 1$
- 解二次式得

$$A_2 = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}$$

- 其中$\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}x^n$

※該方程式只有「一」個生成函數解

- 令$C_k(x)$為用(1)做的生成函數
  $C_k(x)$滿足$xA_k^k = A_k - 1$
- 若$k = 3$，$A_3 = s_1 + s_2$ or $\omega s_1 + \omega^2 s_2$ or $\omega^2 s_1 + \omega s_1$，其中

$$s_1 = \sqrt[3]{-\frac{1}{2x} + \sqrt{(\frac{1}{2x})^2 + (-\frac{1}{3x})^2}};$$

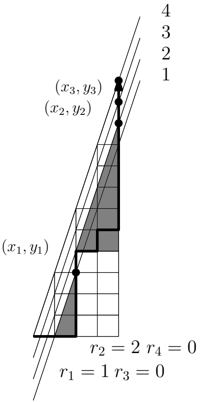
$$s_2 = \sqrt[3]{-\frac{1}{2x} - \sqrt{(\frac{1}{2x})^2 + (-\frac{1}{3x})^2}};$$

$$\omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$$

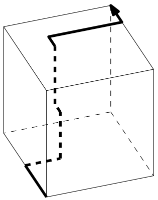
- 應該不能解吧？

※D. Klarner教授[4]或初文昌教授[1]的文章

令$c_{n+1,k}$表示要從$(0,0)$走到$(n+1,k(n+1))$且不超過$L: y=(k-1)x$的路徑數，在圖上畫k條輔助線，第i條為$y-1=(k-1)(x-1)+i$。可知$(0,0)$一定要先走到$(1,0)$，而必然超過k條輔助線各至少一次。
令$(x_0,y_0)=(1,0)$且(x_i,y_i)表示第一次超過第i條輔助線時的交點，訂$r_i=x_{i+1}-x_i$。



其它應用



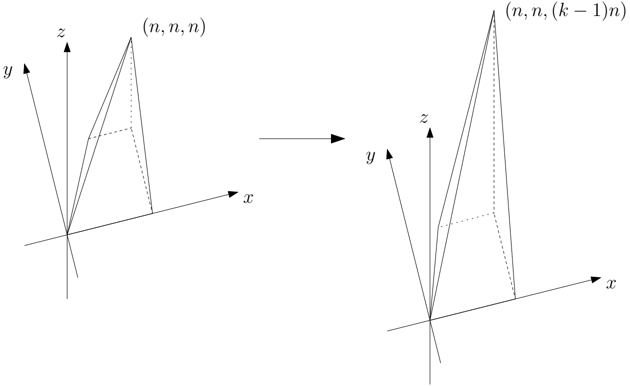
- 只使用三種步伐$\vec{e_1} = (1,0,0)$、$\vec{e_2} = (0,1,0)$、$\vec{e_3} = (0,0,1)$
- 從$(0,0,0)$到(n,n,n)會有$\frac{(3n)!}{n!n!n!}$種走法
- $$\frac{(3n)!}{n!n!n!} = \binom{3n}{n}\binom{2n}{n}\binom{n}{n} = (2n+1)c_{n,3} \times (n+1)c_{n,2}$$
- 也許做一些限制，路徑數會不會剛好是$c_{n,3} \times c_{n,2}$？

性質

只使用上述三種步伐，則從$(0,0,0)$到(n,n,n)且路徑在下列限制條件內

$$\begin{cases} y-z\geq 0 \\ x-\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}z\geq 0 \end{cases}$$

有$c_{n,3}\times c_{n,2}$種走法。

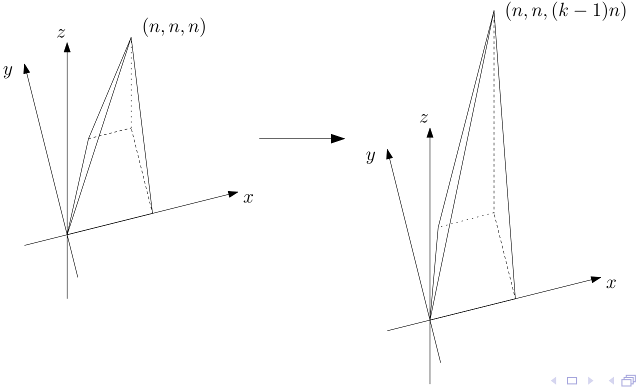


定理

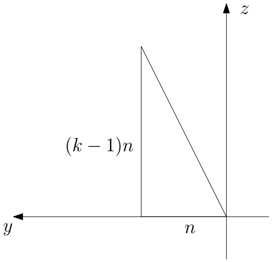
只使用上述三種步伐，則從$(0,0,0)$到$(n,n,(k-1)n)$且路徑在下列限制條件內$(k\geq 2)$

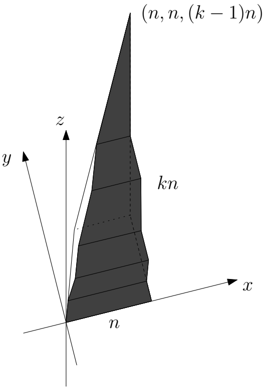
$$\begin{cases} (k-1)y - z \geq 0 \\ x - \frac{1}{k}y - \frac{1}{k}z \geq 0 \end{cases}$$

有$c_{n,k+1}\times c_{n,k}$種走法。



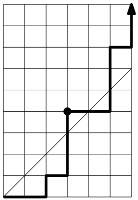
證明





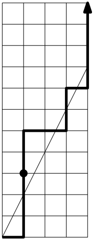
- Jonah's Theorem(Hilton [3])

$$\binom{n+1}{h} = c_0\binom{n}{h} + c_1\binom{n-2}{h-1} + \cdots + c_i\binom{n-2i}{h-i} + \cdots + c_h\binom{n-2h}{0}$$



推廣

$$\binom{n+1}{h} = c_{0,k}\binom{n}{h} + c_{1,k}\binom{n-k}{h-1} + \cdots + c_{i,k}\binom{n-ik}{h-i} + \cdots + c_{h,k}\binom{n-hk}{0}$$



$$\binom{n+1}{h} = c_{0,k}\binom{n}{h} + c_{1,k}\binom{n-k}{h-1} + \cdots + c_{i,k}\binom{n-ik}{h-i} +$$

$$\cdots + c_{h,k}\binom{n-hk}{0}$$

$$(1+x)^{n+1} \stackrel{?}{=} c_{0,k}(1+x)^{n} + c_{1,k}x(1+x)^{n-k} + \cdots + c_{h,k}x^{h}(1+x)^{n-hk} + \ldots$$

$$1 + x \stackrel{?}{=} c_{0,k} + c_{1,k}x(1+x)^{-k} + \cdots + c_{h,k}x^{h}(1+x)^{-hk} + \ldots$$

$$
\begin{aligned}
p(x) &= 1+x, \\
q(x) &= c_{0,k} + c_{1,k}x(1+x)^{-k} + \cdots + c_{h,k}x^h(1+x)^{-hk} + \dots \\
&= C_k(x(1+x)^{-k})
\end{aligned}
$$

，其中C_k是固定k時$c_{h,k}$的生成函數。 $p(x) = q(x)$?

$$
x(1+x)^{-k}A^k(x) = A(x) - 1
$$

- $x(1+x)^{-k}p^k = x(1+x)^{-k}(1+x)^k = x = p-1$
- $x(1+x)^{-k}q^k = x(1+x)^{-k}(C_k(x(1+x)^{-k}))^k = C_k(x(1+x)^{-k}) - 1 = q-1$
- p,q都是$x(1+x)^{-k}A^k(x) = A(x) - 1$的解！

引理

對於符合$f(0)=0$的生成函數$f(x)$

$$f(x)A^k(x)=A(x)-1 \tag{3}$$

至多只有一個生成函數解。也就是說，如果$f(x)$是一生成函數且$f(0)=0$，則至多只有一個生成函數$g(x)$滿足

$$f(x)g^k(x)=g(x)-1$$

證明

若g為(3)的一生成函數解，則我們可以用$A-g$除fA^k-A+1。

$$\begin{array}{c|ccccccc}
g & fA^k & 0A^{k-1} & 0A^{k-2} & \dots & 0A^2 & -A & 1 \\
 & & fg & fg^2 & \dots & fg^{k-2} & fg^{k-1} & fg^k-g \\
\hline
 & f & fg & fg^2 & \dots & fg^{k-2} & fg^{k-1}-1 & \boxed{fg^k-g+1=0}
\end{array}$$

因此我們知道

$$fA^k-A+1=(A-g)(fA^{k-1}+fgA^{k-2}+\cdots+fg^{k-2}A+fg^{k-1}-1)$$

但右式的第二個括號在$x=0$時等於-1不等於0，所以生成函數解只能有一個！

把$(1+x)^n$乘回來

$$(1+x)^{n+1} = c_{0,k}(1+x)^n + c_{1,k}x(1+x)^{n-k} + \cdots + c_{h,k}x^h(1+x)^{n-hk} + \ldots$$

$$\binom{n+1}{h} = c_{0,k}\binom{n}{h} + c_{1,k}\binom{n-k}{h-1} + \cdots + c_{i,k}\binom{n-ik}{h-i} + \cdots + c_{h,k}\binom{n-hk}{0}$$

- $k=0, \Rightarrow$Pascal's 定理

$$\binom{n+1}{h} = \binom{n}{h} + \binom{n}{h-1}$$

- $k=1, \Rightarrow$Pascal's 定理的應用

$$\binom{n+1}{h} = \binom{n}{h} + \binom{n-1}{h-1} + \cdots + \binom{n-h}{0}$$

- $k=2, \Rightarrow$Jonah's 定理

若$h \geq n+1$依然成立

e.g.:

$k=3,\ n=4,\ h=5$

$$1=\binom{5}{5}=1\binom{4}{5}+1\binom{1}{4}+3\binom{-2}{3}+12\binom{-5}{2}+55\binom{-8}{1}+273\binom{-11}{0}$$

$$=0+0-12+180-440+273=1$$

$k=3,\ n=3,\ h=5$

$$0=\binom{4}{5}=1\binom{3}{5}+1\binom{0}{4}+3\binom{-3}{3}+12\binom{-6}{2}+55\binom{-9}{1}+273\binom{-12}{0}$$

$$=0+0-30+252-495+273=0$$

參考文獻

W. Chu, A New Combinatorial Interpretation for Generalized Catalan Number, *Discrete Math.* 65(1987) 91-94.

J. Cofman, Catalan Numbers for the Classroom?, *Elem. Math.* 52(1997) 108-117.

P. Hilton and J. Pedersen, The Ballot Problem and Catalan Numbers, *Nieuw Archief voor Wiskunde* 8(1990) 209-216.

D. Klanrner, Correspondences between Plane Trees and Binary Sequences, *Journal of Combintorical Theory* 9(1970) 401-411.

M. Konvalinka, Divisibility of Generalized Catalan Numbers, *Journal of Combinatorial Theory, Series A* 114(2007) 1089-1110.

B. E. Sagan, Proper Partitions of a Polygon and k-Catalan Numbers, *Discrete Math.*.

A. D. Sands, On Generalized Catalan Numbers, *Discrete Math.* 21(1978) 219-221.

參考文獻

Prof. Shuie, Lecture Notes.

R. P. Stanley, *Enumerative Combinatorics, Volume2*, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

特別感謝

最後，特別感謝薛老師的教導與指正，也謝謝中央研究院數學研究所提供學習關於組合的知識以及文章的撰寫的機會，也謝謝大家的聆聽：）