

雙週一題網路數學問題徵答

103 年度第 2 學期

主辦單位：中山大學應用數學系

補助單位：教育部暨中山大學研究發展處

第一題： 104.03.06 公佈，104.03.20 中午 12 點截止

設 $f(x)$ 和 $g(x)$ 皆為實係數二次多項式且首項係數都是 1，已知 $f^2(x)$ 除以 $g(x)$ 的餘式為 $4x - 4$ ，而 $g^2(x)$ 除以 $f(x)$ 的餘式為 $-4x - 4$ ，求 $f(x) + g(x)$ 。答案： $2x^2 + 2$

解答：因為 f 和 g 皆為二次且首項係數都是 1，所以它們滿足以下：

$$f(x) = g(x) + ax + b \quad (1)$$

由此可得

$$\begin{aligned} f^2(x) &= [g(x) + ax + b]^2 \\ &= g(x) [g(x) + 2(ax + b)] + (ax + b)^2 \end{aligned}$$

又 $f^2(x)$ 除以 $g(x)$ 之餘式為 $4x - 4$ ，因此

$$\begin{aligned} (ax + b)^2 &= a^2x^2 + 2abx + b^2 \\ &= a^2g(x) + 4x - 4 \end{aligned} \quad (2)$$

(因為 $g(x)$ 的首項係數為 1)

另一方面，

$$\begin{aligned} g^2(x) &= [f(x) - ax - b]^2 \\ &= f(x) [f(x) - 2(ax + b)] + (ax + b)^2 \end{aligned}$$

而 $g(x)$ 除以 $f(x)$ 的餘式為 $-4x - 4$ ，即知

$$(ax + b)^2 = a^2f(x) - 4x - 4 \quad (3)$$

(因為 $f(x)$ 的首項係數為 1)

由 (2)(3) 可得

$$f(x) = g(x) + \frac{8}{a^2}x$$

再由 (1) 可得 $b = 0$, $\frac{8}{a^2} = a$, $a = 2$ 。

代回 (2), (3) 得 $f(x) = x^2 + x + 1$, $g(x) = x^2 - x + 1$ 。 □

答案請寄至－高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳真 07-5253809，或利用電子郵件信箱 nsysu.problem@gmail.com (主旨

爲「104 年春季第 X 題解答」)。解答上請註明姓名、校名、校址縣市、系所、年級、班級、學號和 E-mail。