雙週一題網路數學問題徵答
112 學年度第 1 學期

主辦單位:　中山大學應用數學系
補助單位:　教育部暨中山大學研究發展處

第三題：　　112.10.06 公佈，112.10.20 中午 12 點截止

聯立方程組 $\begin{cases} 3x^2+y^2-3xy=3+2\sqrt{2} \\ y^2+z^2-yz=9+6\sqrt{2} \\ z^2+w^2+\sqrt{3}zw=3+2\sqrt{2} \\ w^2+3x^2+\sqrt{3}wx=9+6\sqrt{2} \end{cases}$ 求 $\sqrt{3}xz+yw$ 之值。　答案：$\pm(3\sqrt{3}+2\sqrt{6})$

解答：方法1:(參考旭光高中數學科教師- 謝宗憲詳解)

$$\begin{cases} 3x^2+y^2-3xy=3+2\sqrt{2} \to (1) \\ y^2+z^2-yz=9+6\sqrt{2} \to (2) \\ z^2+w^2+\sqrt{3}zw=3+2\sqrt{2} \to (3) \\ w^2+3x^2+\sqrt{3}wx=9+6\sqrt{2} \to (4) \end{cases}$$

由$3\times(1)-(2)$式可得$(9x^2+3y^2-9xy)-(y^2+z^2-yz)=0$

$\Rightarrow 9x^2-9xy+2y^2+yz-z^2=0$

$\Rightarrow (3x-\frac{3}{2}y)^2-(\frac{1}{2}y-z)^2=0$

$\Rightarrow 3x-\frac{3}{2}y=\pm(\frac{1}{2}y-z)$

$\Rightarrow y=\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}z \to (5)$ 或$y=3x-z \to (6)$

由$3\times(3)-(4)$式可得$(3z^2+3w^2+3\sqrt{3}zw)-(w^2+3x^2+\sqrt{3}wx)=0$

$\Rightarrow 3z^2+3\sqrt{3}zw+2w^2-\sqrt{3}wx-3x^2=0$

$\Rightarrow (\sqrt{3}z+\frac{3}{2}w)^2-(\frac{1}{2}w+\sqrt{3}x)^2=0$

$\Rightarrow \sqrt{3}z+\frac{3}{2}w=\pm(\frac{1}{2}w+\sqrt{3}x)$

$\Rightarrow w=\sqrt{3}x-\sqrt{3}z \to (7)$或$w=-\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}z \to (8)$

因此有四種情況需討論:

情況(一)

$$\begin{cases} y=\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}z \to (5) \\ w=\sqrt{3}x-\sqrt{3}z \to (7) \end{cases}$$

$(5)\times(7)$得

$yw=(\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}z)(\sqrt{3}x-\sqrt{3}z)$

$\Rightarrow yw=\frac{3\sqrt{3}}{2}x^2-\sqrt{3}xz-\frac{\sqrt{3}}{2}z^2$

$\Rightarrow \sqrt{3}xz+yw=\frac{\sqrt{3}}{2}(3x^2-z^2)$

(5)代入(1)得

$3x^2+(\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}z)^2-3x(\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}z)=3+2\sqrt{2}$

$\Rightarrow 3x^2+\frac{9}{4}x^2+\frac{3}{2}xz+\frac{1}{4}z^2-\frac{9}{2}x^2-\frac{3}{2}xz=3+2\sqrt{2}$

$\Rightarrow 3x^2+z^2=12+8\sqrt{2} \to (9)$

(7)代入(3)得

$z^2+(\sqrt{3}x-\sqrt{3}z)^2+\sqrt{3}z(\sqrt{3}x-\sqrt{3}z)=3+2\sqrt{2}$
$\Rightarrow z^2+3x^2-6xz+3z^2+3xz-3z^2=3+2\sqrt{2}$
$\Rightarrow 3x^2-3xz+z^2=3+2\sqrt{2}\to(10)$
(9) - (10) 得$3xz=9+6\sqrt{2}\Rightarrow x^2z^2=(3+2\sqrt{2})^2$
而$(3x^2-z^2)^2=(3x^2+z^2)^2-12x^2z^2=(12+8\sqrt{2})^2-12(3+2\sqrt{2})^2=4(3+2\sqrt{2})^2$
得到$3x^2-z^2=\pm 2(3+2\sqrt{2})$
因此$\sqrt{3}xz+yw=\frac{\sqrt{3}}{2}(3x^2-z^2)=\frac{\sqrt{3}}{2}\times[\pm 2(3+2\sqrt{2})]=\pm(3\sqrt{3}+2\sqrt{6})$
情況(二)
$\begin{cases} y=3x-z\to(6) \\ w=-\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}z\to(8) \end{cases}$
$(6)\times(8)$得
$yw=(3x-z)(-\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}z)$
$\Rightarrow yw=-\frac{3\sqrt{3}}{2}x^2-\sqrt{3}xz+\frac{\sqrt{3}}{2}z^2$
$\Rightarrow \sqrt{3}xz+yw=-\frac{\sqrt{3}}{2}(3x^2-z^2)$
(6)代入(1)得
$3x^2+(3x-z)^2-3x(3x-z)=3+2\sqrt{2}$
$\Rightarrow 3x^2+9x^2-6xz+z^2-9x^2+3xz=3+2\sqrt{2}$
$\Rightarrow 3x^2-3xz+z^2=3+2\sqrt{2}\to(10)$
(8)代入(3)得
$z^2+(-\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}z)^2+\sqrt{3}z(-\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}z)=3+2\sqrt{2}$
$\Rightarrow z^2+\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{2}xz+\frac{3}{4}z^2-\frac{3}{2}xz-\frac{3}{2}z^2=3+2\sqrt{2}$
$\Rightarrow 3x^2+z^2=12+8\sqrt{2}\to(9)$
同情況(一)的解法，由(9)與(10)式可得$3x^2-z^2=\pm 2(3+2\sqrt{2})$
因此$\sqrt{3}xz+yw=-\frac{\sqrt{3}}{2}(3x^2-z^2)=-\frac{\sqrt{3}}{2}\times[\pm 2(3+2\sqrt{2})]=\pm(3\sqrt{3}+2\sqrt{6})$
情況(三)
$\begin{cases} y=\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}z\to(5) \\ w=-\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}z\to(8) \end{cases}$
由情況(一)得知，(5)代入(1)可得$3x^2+z^2=12+8\sqrt{2}\to(9)$
$(5)\times(8)$得
$yw=(\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}z)(-\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}z)$
$\Rightarrow yw=-\frac{3\sqrt{3}}{4}x^2-\sqrt{3}xz-\frac{\sqrt{3}}{4}z^2$
$\Rightarrow \sqrt{3}xz+yw=-\frac{\sqrt{3}}{4}(3x^2+z^2)=-\frac{\sqrt{3}}{4}(12+8\sqrt{2})=-(3\sqrt{3}+2\sqrt{6})$
情況(四) $\begin{cases} y=3x-z\to(6) \\ w=\sqrt{3}x-\sqrt{3}z\to(7) \end{cases}$
由情況(二)得知，(6)代入(1)可得$3x^2-3xz+z^2=3+2\sqrt{2}\to(10)$
$(6)\times(7)$得
$yw=(3x-z)(\sqrt{3}x-\sqrt{3}z)$
$\Rightarrow yw=3\sqrt{3}x^2-3\sqrt{3}xz-\sqrt{3}xz+\sqrt{3}z^2$
$\Rightarrow \sqrt{3}xz+yw=3\sqrt{3}x^2-3\sqrt{3}xz+\sqrt{3}z^2=\sqrt{3}(3x^2-3xz+z^2)=\sqrt{3}(3+2\sqrt{2})=$

$3\sqrt{3}+2\sqrt{6}$

統整上述四種情形，可知$\sqrt{3}xz+yw=\pm(3\sqrt{3}+2\sqrt{6})$。

方法2:(只能求正的解)

將方程式看成餘弦定理的形式，並重新整理，

令 $\begin{cases} a^2=3+2\sqrt{2}=(\sqrt{2}+1)^2 \\ b^2=9+6\sqrt{2}=(\sqrt{6}+\sqrt{3})^2 \end{cases}$

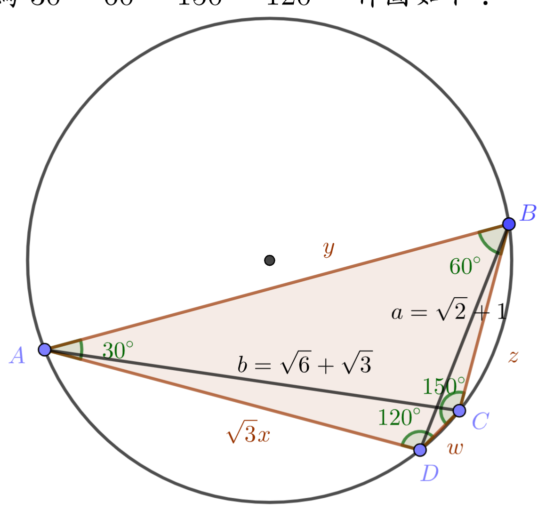
$$\Rightarrow \begin{cases} 3x^2+y^2-3xy=3+2\sqrt{2}=(\sqrt{2}+1)^2=a^2 \\ y^2+z^2-yz=9+6\sqrt{2}=(\sqrt{6}+\sqrt{3})^2=b^2 \\ z^2+w^2+\sqrt{3}zw=3+2\sqrt{2}=(\sqrt{2}+1)^2=a^2 \\ w^2+3x^2+\sqrt{3}wx=9+6\sqrt{2}=(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2=b^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x^2+y^2-a^2=3xy \\ y^2+z^2-b^2=yz \\ z^2+w^2-a^2=-\sqrt{3}zw \\ w^2+3x^2-b^2=\sqrt{3}wx \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{(\sqrt{3}x)^2+y^2-a^2}{2\sqrt{3}xy}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\cos 30^\circ \\ \dfrac{y^2+z^2-b^2}{2yz}=\dfrac{1}{2}=\cos 60^\circ \\ \dfrac{z^2+w^2-a^2}{2zw}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\cos 150^\circ \\ \dfrac{w^2+(\sqrt{3}x)^2-b^2}{2\sqrt{3}wx}=-\dfrac{1}{2}=\cos 120^\circ \end{cases}$$

觀察四個角度，可發現 $\begin{cases} 30^\circ+60^\circ+150^\circ+120^\circ=360^\circ \\ 30^\circ+150^\circ=60^\circ+120^\circ=180^\circ \end{cases}$ 則此方程組相當於

有一圓內接四邊形，其邊長分別爲 $\sqrt{3}x$、y、z、w，兩對角線長爲 a 及 b；
四邊形各頂點角度分別爲 30°、60°、150°、120°，作圖如下：



由托勒密定理：圓內接四邊形，兩位角線長之積 = 兩對邊積之和；
$\Rightarrow \sqrt{3}xz + yw = ab = (\sqrt{2}+1)(\sqrt{6}+\sqrt{3}) = 3\sqrt{3}+2\sqrt{6}$。 □

答案請寄至 – 高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳眞 07-5253809，或利用電子郵件信箱 nsysu.problem.2022@gmail.com (主旨爲「112 年秋季第 X 題解答」) 。若以電子郵件信箱寄送答案者，請在信件中打字註明您的資料，包含：**姓名、校名、校址縣市、系所、年級 、班級、學號**和 **E-mail**。