

雙週一題網路數學問題徵答 112 學年度第 1 學期

主辦單位：中山大學應用數學系
補助單位：教育部暨中山大學研究發展處

第四題： 112.10.20 公佈，112.11.03 中午 12 點截止

令 A 、 B 和 C 為任意三角形的角，滿足

$$\begin{aligned}\cos^2 A + \cos^2 B + 2 \sin A \sin B \cos C &= \frac{15}{8} \\ \cos^2 B + \cos^2 C + 2 \sin B \sin C \cos A &= \frac{14}{9}\end{aligned}$$

求 $\cos^2 C + \cos^2 A + 2 \sin C \sin A \cos B$ 之值。

答案： $\frac{111 \pm 4\sqrt{35}}{72}$

解答：先劃出一個三角形，因為此問題在處理角度，我們可以任意和設定邊的其中之一為方便的值，令 $\overline{BC} = \sin A$ ，再藉由正弦定理，我們必有 $\overline{CA} = \sin B$ 及 $\overline{AB} = \sin C$ 。

現在，我們再藉由餘弦定理可得：

$$\begin{aligned}\cos^2 A + \cos^2 B + 2 \sin A \sin B \cos C &= 1 - \sin^2 A + 1 - \sin^2 B + 2 \sin A \sin B \cos C \\ &= 2 - (\overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 - 2\overline{BC} \times \overline{CA} \times \cos C) \\ &= 2 - \overline{AB}^2 \\ &= 2 - \sin^2 C\end{aligned}$$

因此，

$$\sin C = \sqrt{\frac{1}{8}}, \cos C = \pm\sqrt{\frac{7}{8}}$$

同理可得，

$$\sin A = \sqrt{\frac{4}{9}}, \cos A = \pm\sqrt{\frac{5}{9}}$$

欲求的值等價於 $2 - \sin^2 B = 2 - \sin^2(\pi - A - C)$ ，此為 $2 - \sin^2(A + C)$ 。再利用正弦和角公式，可得 $\frac{111 \pm 4\sqrt{35}}{72}$ 的結果。

答案請寄至 - 高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳真 07-5253809，或利用電子郵件信箱 nsysu.problem.2022@gmail.com (主旨為「112 年秋季第 X 題解答」)。若以電子郵件信箱寄送答案者，請在信件中打字註明您的資料，包含：姓名、校名、校址縣市、系所、年級、班級、學號和 E-mail。