

雙週一題網路數學問題徵答
112 學年度第 1 學期

主辦單位：中山大學應用數學系
補助單位：教育部暨中山大學研究發展處

第五題： 112.11.03 公佈，112.11.17 中午 12 點截止

考慮方程式 $N = x^3(3x + 1) = y^2(y + 1)^3$ ，其中 x, y 是互質正整數。
證明 N 只有一個可能的值。

答案：2000

解答：因為 $(x, y) = 1$ ，所以 $x^3 | (y + 1)^3$ ，因此 $x | (y + 1)$ ， $x \leq y + 1$ 。

同理 $y^2 | (3x + 1)$ ，所以 $y^2 \leq 3x + 1$ 。

將不等式合併可得 $x^2 - 5x \leq 0$ ，由於 x 為正，只有 $x = 1, 2, 3, 4, 5$ 是可能的。

在 $x^3(3x + 1) = y^2(y + 1)^3$ 中嘗試這些值，我們發現只有 $x = 5, y = 4$ 是可行的，
因此 $N = 4^2 \cdot 5^3 = 2000$ 是唯一的解。 □

答案請寄至 - 高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或
傳真 07-5253809，或利用電子郵件信箱 nsysu.problem.2022@gmail.com
(主旨為「112 年秋季第 X 題解答」)。若以電子郵件信箱寄送答案者，
請在信件中打字註明您的資料，包含：姓名、校名、校址縣市、系所、年
級、班級、學號和 E-mail。