

# 雙週一題網路數學問題徵答

## 112 學年度第 1 學期

主辦單位：中山大學應用數學系  
補助單位：教育部暨中山大學研究發展處

第六題： 112.11.17 公佈，112.12.01 中午 12 點截止

假設  $a_1, a_2, \dots, a_n$  為實數，且  $|a_n| > \sum_{k=1}^{n-1} |a_k|$ ，  
證明  $f(x) = \sum_{k=1}^n a_k \cos kx$  在  $0 \leq x \leq \pi$  時至少有  $n$  個零根。

解答：將區間  $0 \leq x \leq \pi$  分割成  $n$  個大小相同的子區間，

$(\frac{k\pi}{n} \leq x \leq \frac{(k+1)\pi}{n})$ ， $k = 0, 1, \dots, n-1$ ，

在每個區間內，我們有一端  $\cos nx = 1$ ，另一端  $\cos nx = -1$ ，因此，

由於  $-\sum_{k=1}^{n-1} |a_k| \leq \sum_{k=1}^{n-1} a_k \cos kx \leq \sum_{k=1}^{n-1} |a_k|$ ，

所以，其中一端，

$f(x) = |a_n| + \sum_{k=1}^{n-1} a_k \cos kx \geq |a_n| - \sum_{k=1}^{n-1} |a_k| > 0$ ，

而在另一端，

$f(x) = -|a_n| + \sum_{k=1}^{n-1} a_k \cos kx \leq -|a_n| + \sum_{k=1}^{n-1} |a_k| < 0$ 。

由於  $f(x)$  是連續的，因此在這個區間內至少存在一個  $x$ ，使得  $f(x) = 0$ ，

這樣的區間有  $n$  個，因此在  $0 \leq x \leq \pi$  時至少有  $n$  個零根。  $\square$

答案請寄至 - 高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳真 07-5253809，或利用電子郵件信箱 [nsysu.problem.2022@gmail.com](mailto:nsysu.problem.2022@gmail.com) (主旨為「112 年秋季第 X 題解答」)。若以電子郵件信箱寄送答案者，請在信件中打字註明您的資料，包含：姓名、校名、校址縣市、系所、年級、班級、學號和 E-mail。