

雙週一題網路數學問題徵答 112 學年度第 1 學期

主辦單位：中山大學應用數學系
補助單位：教育部暨中山大學研究發展處

第七題： 112.12.01 公佈，112.12.15 中午 12 點截止

求次數不超過 3 的多項式 $p(x)$ ，使得 $m = \max_{0 \leq x \leq 1} |\cos 4\pi x - p(x)|$ 有最小值。答案： $p(x)$ 為零多項式

解答：如果 $p(x)$ 是零多項式，那麼 $m = \max_{0 \leq x \leq 1} |\cos 4\pi x| = 1$ 。現在假設 $p(x)$ 是次數不超過 3 的多項式，且 $m \leq 1$ ，我們證明 $p(x)$ 一定是零多項式。

因為 $m \leq 1$ ，

$$\begin{aligned} p(0), p(0.5), p(1) &\geq 0, \\ p(0.25), p(0.75) &\leq 0. \end{aligned} \quad (1)$$

設 Δ 為前向差分算子 $\Delta : p(x) \rightarrow p(x + 0.25) - p(x)$ 。那麼，由於 $p(x)$ 的次數最多為 3，

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta^4 p(0) \\ &= p(1) - 4p(0.75) + 6p(0.5) - 4p(0.25) + p(0) \\ &= [p(1) - p(0.75)] + 3[p(0.5) - p(0.75)] + 3[p(0.5) - p(0.25)] + [p(0) - p(0.25)] \end{aligned} \quad (2)$$

根據 (1) 和 (2)， $p(1) = p(0.75) = p(0.5) = p(0.25) = p(0) = 0$ ，由於 $p(x)$ 的次數最多為 3，而 $p(x)$ 至少有 5 個零，所以它一定是零多項式。

因此，所求的多項式 $p(x)$ 為零多項式。 \square

答案請寄至 - 高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳真 07-5253809，或利用電子郵件信箱 nsysu.problem.2022@gmail.com (主旨為「112 年秋季第 X 題解答」)。若以電子郵件信箱寄送答案者，請在信件中打字註明您的資料，包含：姓名、校名、校址縣市、系所、年級、班級、學號和 E-mail。