雙週一題網路數學問題徵答
112 學年度第 1 學期

主辦單位: 中山大學應用數學系
補助單位: 教育部暨中山大學研究發展處

第八題： 112.12.15 公佈，112.12.29 中午 12 點截止

假設 α 是在 $(0,1)$ 區間上的無理數，證明存在唯一無窮級數 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{a_1a_2\cdots a_n}=\alpha$，其中 a_i 爲嚴格遞增的正整數，求當 $\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 時，找出 a_1, a_2, a_3。 答案：$a_1=1$, $a_2=3$, $a_3=8$

解答： 設 s_n 爲前 n 項的和，這些項的正負符號交替且絕對值遞減，因此數列 s_n 的奇數項下降，而偶數項則上升，每個奇數項均大於每個偶數項，因此奇數項和偶數項都必定收斂，然而 $|s_n-s_{n+1}|<\frac{1}{2^n}$ 趨近於零，因此它們趨向於一個共同的極限。

選擇 a_n 如下，取 a_1 爲最小的整數，其倒數大於 α，然後選擇 a_{2n-1} 後，取 a_{2n} 爲最大的整數，使得 $s_{2n}<\alpha$，選擇 a_{2n} 後，取 a_{2n+1} 爲最大的整數，使得 $s_{2n+1}>\alpha$。

我們需要證明這些選擇是可行的，換句話說，它們產生了一個嚴格遞增的序列 a_n。這取決於關係式

$$1/k-1/k(k+1)=1/(k+1) \tag{1}$$

假設我們選擇了 a_{2n-1}，那麼我們知道 $s_{2n-1}>\alpha$，但是如果將 a_{2n-1} 增加 1，那麼 s_{2n-1} 將小於 α，因此使用 (1)，取 $a_{2n}=a_{2n-1}+1$ 給出了 $s_{2n}<\alpha$。另一方面，如果我們取 a_{2n} 足夠大，那麼 s_{2n} 將接近 s_{2n-1}，因此將超過 α (注意 α 是無理數，因此它不等於任何 s_m)，因此選擇 a_{2n} 將超過 a_{2n-1}，則 a_{2n+1} 超過 a_{2n}。

因此，我們已經證明可以找到一個序列 a_n，使得 s_n 所有奇數和大於 α，而所有偶數和小於 α，由於 s_n 趨向於一個極限，因此該極限必定爲 α，這證明了存在性。

假設存在另一種展開方式，使得 $\alpha=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_1a_2}+\cdots=\frac{1}{b_1}-\frac{1}{b_1b_2}+\cdots$，與前述相同，我們有 $\frac{1}{a_1+1}<\alpha<\frac{1}{a_1}$ 和 $\frac{1}{b_1+1}<\alpha<\frac{1}{b_1}$，但由於 a_1 和 b_1 都是整數，這意味著 $a_1=b_1$，現在假設已經確定對於 $i\leq n$，有 $a_i=b_i$。那麼我們有 $\beta=(-1)^n a_1\cdots a_n(\alpha-\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_1a_2}-\cdots+\frac{(-1)^n}{a_1\cdots a_n})=\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_{n+1}a_{n+2}}+\cdots$，但我們還有 $\beta=\frac{1}{b_{n+1}}-\frac{1}{b_{n+1}b_{n+2}}+\cdots$，像之前那樣證明，$\beta$ 介於 $\frac{1}{(a_{n+1}+1)}$ 和 $\frac{1}{a_{n+1}}$之間，也介於 $\frac{1}{(b_{n+1}+1)}$ 和 $\frac{1}{b_{n+1}}$ 之間，因此，$a_{n+1}=b_{n+1}$，這證明了唯一性。

最後考慮 $\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$，我們有 $\frac{1}{2}<\frac{1}{\sqrt{2}}<1$，所以選擇 $a_1=1$，我們必須選擇 a_2 爲最大整數，使得 $1-\frac{1}{a_2}<\frac{1}{\sqrt{2}}$，即 $a_2<2+\sqrt{2}=3.4$，所以 $a_2=3$，接著選擇 a_3 爲

最大整數，使得 $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3a_3}>\frac{1}{\sqrt{2}}$，即 $2+\frac{1}{a_3}>\frac{3}{\sqrt{2}}$ 或 $a_3<3\sqrt{2}+4=8.2$，所以 $a_3=8$。 $\square$

答案請寄至－高雄市中山大學應數系圖書館的『 雙週一題 』信箱，或傳真 07-5253809，或利用電子郵件信箱 nsysu.problem.2022@gmail.com (主旨為「112 年秋季第 X 題解答」) 。若以電子郵件信箱寄送答案者，請在信件中打字註明您的資料，包含：**姓名、校名、校址縣市、系所、年級 、班級、學號**和 **E-mail**。