

雙週一題網路數學問題徵答

112 學年度第 2 學期

主辦單位：中山大學應用數學系
補助單位：教育部暨中山大學研究發展處

第三題： 113.03.22 公佈，113.04.05 中午 12 點截止

令 x_1, x_2, \dots, x_{18} 為方程式 $x^{18} + 4x^{11} + 1 = 0$ 的 18 個根，求 $(x_1^4 + x_1^2 + 1)(x_2^4 + x_2^2 + 1) \cdots (x_{18}^4 + x_{18}^2 + 1)$ 的值為何？ 答案：336

解答：設 $w_1, \overline{w_1}$ 為 $x^3 = 1$ 的虛根， $w_1^3 = \overline{w_1}^3 = 1$ ， $w_1 \overline{w_1} = 1$ ， $w_1 + \overline{w_1} = -1$ ， $w_1^2 = -(\overline{w_1} + 1)$ ， $w_2, \overline{w_2}$ 為 $x^3 = -1$ 的虛根， $w_2^3 = \overline{w_2}^3 = -1$ ， $w_2 + \overline{w_2} = 1$ ， $w_2^2 = \overline{w_2} - 1$ ，
則 $\prod_{i=1}^{18} (x_i^4 + x_i^2 + 1) = \prod_{i=1}^{18} (x_i - w_1)(x_i - \overline{w_1})(x_i - w_2)(x_i - \overline{w_2})$
令 $f(x) = x^{18} + 4x^{11} + 1 = \prod_{i=1}^{18} (x - x_i)$
則

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{18} (x_i^4 + x_i^2 + 1) &= \prod_{i=1}^{18} (x_i - w_1)(x_i - \overline{w_1})(x_i - w_2)(x_i - \overline{w_2}) \\ &= (x_1 - w_1)(x_2 - w_1) \cdots (x_{18} - w_1) \\ &\quad (x_1 - \overline{w_1})(x_2 - \overline{w_1}) \cdots (x_{18} - \overline{w_1}) \\ &\quad (x_1 - w_2)(x_2 - w_2) \cdots (x_{18} - w_2) \\ &\quad (x_1 - \overline{w_2})(x_2 - \overline{w_2}) \cdots (x_{18} - \overline{w_2}) \\ &= f(w_1)f(\overline{w_1})f(w_2)f(\overline{w_2}) \\ &= (2 + 4w_1^2)(2 + 4\overline{w_1}^2)(2 - 4w_2^2)(2 - 4\overline{w_2}^2) \\ &= (-2 - 4w_1)(-2 - 4\overline{w_1})(6 - 4w_2)(6 - 4\overline{w_2}) \\ &= 4(1 + 2w_1)(1 + 2\overline{w_1})(36 + 16 - 24) \\ &= 4(1 + 4 - 2) \times 28 \\ &= 336 \end{aligned}$$

□

答案請寄至 - 高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳真 07-5253809，或利用電子郵件信箱 nsysu.problem.2022@gmail.com (主旨為「113 年春季第 X 題解答」)。若以電子郵件信箱寄送答案者，請在信件中打字註明您的資料，包含：姓名、校名、校址縣市、系所、年級、班級、學號和 E-mail。